

Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej
Juniorów — poziom OM



8–15 czerwca 2025 r.

Skład komputerowy: Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OM) przeprowadzono w dniach 8–15 czerwca 2025 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik” w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 7-8 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XX OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia i wieczory poświęcone były na wykłady i zajęcia warsztatowe. W czwartek odbył się spacer do Świętokrzyskiego Parku Narodowego, a w sobotę przeprowadzony został mecz matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami (wkrótce dodamy rozwiązania). Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów zwłaszcza w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej dla szkół ponadpodstawowych.

Trudność niektórych zadań, z którymi mierzyli się uczestnicy Obozu, przewyższa zdecydowanie poziom zawodów finałowych OMJ. Wychodząc (niekiedy wyraźnie) poza program merytoryczny Olimpiady, staraliśmy się wskazać niektóre podstawowe narzędzia przydatne na poziomie międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim (obejmujących także uczniów szkół średnich) oraz na zawodach pierwszego i drugiego stopnia Olimpiady Matematycznej.

Milej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OM)

Uczniowie: Tymoteusz Barcicki, Dawid Bociąga, Zuzanna Czubińska, Antoni Glinka, Karol Kaczmarek, Mikołaj Kasprowicz, Wojciech Klich, Antoni Literski, Patryk Niewczas, Konstanty Opas, Krzysztof Pietruszka, Mateusz Pszona, Adam Rowiński, Mateusz Rybka, Piotr Słabicki, Rafał Sobolewski, Michał Szczurek, Piotr Świdorski, Viktoriya Viarenich, Krzysztof Witkowski

Kadra: Paweł Dziuba (kierownik), Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	12	3	2	3
2.	1	7	4	8
3.	6	0	0	14
4.	13	2	3	2
5.	1	0	0	19
6.	2	0	5	13
7.	10	1	1	8
8.	9	5	1	5
9.	8	0	0	12
10.	8	0	0	12
11.	1	4	3	12
12.	5	0	1	14
13.	6	1	3	10
14.	1	0	1	18
15.	7	0	5	8
16.	0	0	0	20
17.	16	1	0	3
18.	14	1	1	4
19.	9	0	1	10
20.	1	0	1	18
21.	1	1	3	15
22.	16	1	0	3
23.	14	1	1	4
24.	9	0	1	10
25.	1	0	1	18
26.	1	1	3	15

Treści zadań

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n spełniające następujące własności: n ma co najmniej 3 dodatnie dzielniki, z których najmniejsze to $1 < d_1 < d_2$ oraz

$$n = d_1^2 + d_2^3.$$

Zadanie 2.

Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} a^2 + 2a = b \\ b^2 + 2b = c \\ c^2 + 2c = a \end{cases}$$

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym w wierzchołku C . Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie K . Wykaż, że cięciwa tego okręgu zawarta w prostej AK jest dwa razy dłuższa od wysokości trójkąta ACK opuszczonej z wierzchołka C .

Zadanie 4.

W pewnym sklepie kupić można zestaw składający się z 1000 kart, na których po obu stronach napisane są liczby naturalne od 1 do 2000. Każda z tych 2000 liczb występuje dokładnie jeden raz na pewnej karcie należącej do zestawu. Wszystkie zestawy dostępne w tym sklepie konstruowane są zgodnie z tą zasadą, ale nie wszystkie zestawy są identyczne — to znaczy: pary liczb występujące na kartach w różnych zestawach nie muszą być identyczne.

Jaś kupił w tym sklepie 2 zestawy kart. Wykaż, że może rozłożyć swoje 2000 kart w taki sposób, że każda liczba od 1 do 2000 jest widoczna dokładnie na jednej karcie.

Zadanie 5.

W trójkącie równoramiennym ABC , gdzie $AC = BC$, kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 20° . Punkty D i E należące odpowiednio do boków BC i AC są spodkami dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A i B . Wykaż, że punkty D , E oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Zadanie 6.

Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} a^2 + a - 1 = b \\ b^2 + b - 1 = c \\ c^2 + c - 1 = a \end{cases}$$

Zadanie 7.

Dane są dodatnie liczby całkowite m, n , takie że ich suma dzieli ich iloczyn. Wykaż, że $m \leq n^2 - n$.

Zadanie 8.

Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste $x > \frac{1}{2}$ spełniające

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}.$$

Zadanie 9.

W trójkącie ABC punkt L jest spodkiem dwusiecznej kąta wewnętrznego ABC poprowadzonej z wierzchołka A na bok BC . Punkt D jest środkiem odcinka AL , a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na bok AB . Załóżmy, że odcinek AC jest trzy razy dłuższy od odcinka AE . Wykaż, że trójkąt CLE jest równoramienny.

Zadanie 10.

W pewnej tajnej agencji jest 2025 szpiegów, z których każdy ma pewną informację znaną tylko sobie. Co godzinę pewien ze szpiegów dzwoni do innego i przekazuje mu wszystkie posiadane informacje (ale nie otrzymuje podczas tej rozmowy żadnych informacji od rozmówcy). Jaka jest najmniejsza możliwa liczba rozmów potrzebna, aby wszyscy szpiegowie poznali wszystkie posiadane przez siebie informacje?

Zadanie 11.

Definiujemy ciąg liczb całkowitych (a_n) w następujący sposób: liczba a_1 jest dowolną liczbą całkowitą, a mając zdefiniowane liczby $a_1, \dots, a_{n-1}$ wybieramy a_n jako jedyną liczbę całkowitą z przedziału $[0, n-1]$, dla której

$$n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Wykaż, że każdy taki ciąg (a_n) jest *od pewnego momentu stały*, czyli dla każdego takiego ciągu (a_n) istnieje takie N , że a_n przyjmuje identyczne wartości dla $n > N$.

Zadanie 12.

Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O . Z punktu A poprowadzono obie styczne do okręgu opisanego na trójkącie CDO , a punkty styczności oznaczono P i Q . Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie APQ przechodzi przez środek podstawy AB .

Zadanie 13.

Dana jest liczba całkowita $n \geq 3$. Na pewnym okręgu zaznaczono $2n$ punktów, dzieląc go na $2n$ łuków. Okazało się, że długości tych łuków przyjmują tylko trzy różne wartości, przy czym żadne dwa sąsiednie łuki nie są tej samej długości. Zaznaczone punkty pokolorowano na przemian na niebiesko i czerwono.

Niebieskim n -kątem nazwiemy n -ką o n niebieskich wierzchołkach, a czerwonym n -kątem nazwiemy n -ką o n czerwonych wierzchołkach. Wykaż, że niebieski n -ką i czerwony n -ką mają równe pola i obwody.

Zadanie 14.

Dla dodatnich liczb całkowitych x, y spełnione są warunki

$$\left\{ \sqrt{x^2 + 2y} \right\} > \frac{2}{3} \quad \text{oraz} \quad \left\{ \sqrt{y^2 + 2x} \right\} > \frac{2}{3}.$$

Wykaż, że $x = y$.

Uwaga: Dla liczby rzeczywistej a przez $\{a\}$ oznaczamy część ułamkową a , czyli $\{a\} = a - k$, gdzie k jest największą liczbą całkowitą spełniającą warunek $k \leq a$.

Zadanie 15.

Wykaż, że wszystkie dodatnie liczby całkowite można pokolorować na trzy kolory tak, by dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wśród liczb $n, 2n, 3n$ występowały wszystkie trzy kolory.

Zadanie 16.

W pewnej klasie składającej się z n uczniów funkcjonuje pewna liczba trzyosobowych kółek naukowych. Każdy uczeń może należeć do dowolnej liczby kółek, ale żadna para uczniów nie jest jednocześnie w dwóch różnych kółkach. Wykaż, że możemy wybrać k uczniów tej klasy tak, by $\sqrt{2n} - 1 \leq k$, i by z żadnego kółka nie wybrać wszystkich trzech członków.

Zadanie 17.

Gdy Jaś widzi nieujemną liczbę całkowitą, zwiększa ją o pewną z jej cyfr. Gdy natomiast Staś widzi nieujemną liczbę całkowitą, zmniejsza ją o pewną z jej cyfr. Na tablicy zapisano pewną dodatnią liczbę całkowitą, a następnie pozwolono Jasiowi i Stasiowi na przemian wykonywać na niej swoje operacje. Wykaż, że niezależnie od tego, które cyfry będą wybierać, jeden z nich będzie pewnym momencie zmuszony, by napisać na tablicy liczbę, która już wcześniej się na niej pojawiła.

Zadanie 18.

W kwadracie $ABCD$ zaznaczono punkty E i F odpowiednio na bokach AB i BC tak, że $AE = BF$. Punkt G jest symetryczny do punktu F względem środka boku AB , a punkt H symetryczny do punktu E względem środka boku BC . Wykaż, że trójkąty DEF i BGH mają równe pola.

Zadanie 19.

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y o spełniających

$$\frac{x^2 + y^2}{2x + 3y} = 6.$$

Zadanie 20.

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O , a jego ramiona BC i DA mają długość równą promieniowi tego okręgu. Przez X oznaczmy punkt przecięcia prostej BD i prostej przechodzącej przez punkt O prostopadłej do prostej AC . Wykaż, że trójkąt AXD jest równoramienny.

Zadanie 21.

Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których $p^2 - p + 1$ jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 22.

Na pewnym przyjęciu jest $n \geq 3$ uczestników, spośród których istnieją takie pary osób, które się znają i istnieją takie pary osób, które się nie znają. Okazało się, że niezależnie od tego jak rozdzielimy uczestników na dwie niepuste i rozłączne grupy, pewna osoba z pierwszej grupy zna pewną osobę z drugiej. Wykaż, że można wskazać taką trójkę uczestników A, B, C tego przyjęcia, że A i B się znają, B i C się znają, natomiast A i C się nie znają.

Zadanie 23.

W wierzchołkach dziesięciokąta foremnego napisano 10 parami różnych liczb całkowitych. Wykaż, że istnieją takie cztery kolejne wierzchołki tego dziesięciokąta, że umieszczone w nich kolejno liczby a, b, c, d spełniają warunek $a + d > b + c$.

Zadanie 24.

Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x + y + \frac{|x - 1|}{y} + \frac{|y - 1|}{x} \geq 2.$$

Zadanie 25.

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b spełniających warunek

$$ab \mid a^{2017} + b.$$

Zadanie 26.

Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B . Punkty X i Y leżą odpowiednio na okręgach o_2 i o_1 w taki sposób, że proste BX oraz BY są prostopadłe. Oznaczmy przez O środek okręgu o_1 , a przez X' różny od punktu X punkt przecięcia prostej OX z okręgiem o_2 . Przez Y' oznaczmy natomiast różny od punktu Y punkt przecięcia prostej $X'Y$ z okręgiem o_2 . Wykaż, że punkt X jest środkiem łuku AY okręgu o_2 .

Zadanie 27.

W rzędzie ułożone jest 100 dodatnich liczb całkowitych. Jeśli w ciągu tym znajdziemy dwie kolejno ułożone liczby a, b , przy czym a jest na lewo od b oraz $a < b$, to możemy wykonać operację polegającą na podwojeniu obu tych liczb i zamianie ich miejscami. Wykaż, że możemy wykonać tylko skończenie wiele takich operacji.

Zadanie 28.

Tysiąc uczniów pewnej szkoły pojechało na wycieczkę. Na miejsce wycieczki zawiozło ich 11 busów, a z powrotem odwiozło ich 10 busów. Każdy z tysiąca uczniów jechał i wracał w jednym z busów. Wykaż, że pewien uczeń jechał na miejsce wycieczki w mniej licznej grupie niż grupa, w której wracał.

Zadanie 29.

Jaś i Staś bawią się dużym kawałkiem plasteliny. Na przemian, zaczynając od Jasia, wykonują oni następujące ruchy: Jaś bierze któryś z istniejących kawałków plasteliny i dzieli go na trzy części w dowolny sposób. Staś natomiast wybiera dowolne dwa kawałki i skleja je w jeden. Celem Jasia jest, żeby w pewnym momencie istniało dokładnie 100 kawałków plasteliny o równej masie. Czy może on, niezależnie od ruchów Stasia, osiągnąć ten cel?

Zadanie 30.

Czy istnieje taki nieskończony podzbiór zbioru dodatnich liczb całkowitych, że suma dowolnych skończenie wielu jego elementów nie jest postaci a^b , dla pewnych liczb całkowitych $a, b > 1$?

Zadanie 31.

Wykaż, że dla dowolnych parami różnych liczb całkowitych a, b, c zachodzi

$$\text{NWD}(ab + 1, bc + 1, ca + 1) < \frac{a + b + c}{3}.$$

Zadanie 32.

Znajdź wszystkie liczby całkowite $n > 1$ spełniające następujący warunek: dla dowolnej liczby pierwszej p dzielącej n liczba $n + p$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 33.

Dane są nieskończone zbiory A i B dodatnich liczb całkowitych. Czy możliwe jest, że wszystkie liczby, które można przedstawić jako iloczyn $a \cdot b$, dla $a \in A$ i $b \in B$, to dokładnie wszystkie większe od 2025 liczby postaci a^b , dla pewnych liczb całkowitych $a, b > 1$?

Zadanie 34.

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające $a + b + c = 3$. Wykaż, że

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} \geq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

Zadanie 35.

Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równość

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Wykaż, że suma pewnych dwóch z liczb a, b, c, d nie przekracza 2.

Zadanie 36.

Wielokąt, którego wszystkie wierzchołki mają obie współrzędne całkowite, nazwiemy *kanciatym*, jeśli wszystkie jego boki są równoległe do którejś z dwóch osi układu współrzędnych. Ile osi symetrii może mieć kanciaty wielokąt? Podaj (i uzasadnij) wszystkie możliwe odpowiedzi.

Zadanie 37.

Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio w punktach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B . Prosta O_1B przecina okrąg o_2 po raz drugi w punkcie C , a prosta O_2A przecina okrąg o_1 po raz drugi w punkcie D . Przez X oznaczamy drugi punkt przecięcia prostej AC z okręgiem o_1 , a przez Y oznaczamy drugi punkt przecięcia prostej BD z okręgiem o_2 . Wykaż, że $CX = DY$.

Zadanie 38.

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Środek boku AC oznaczamy przez M , a spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka A na prostą BC oznaczamy przez D . Prosta DM przecina okrąg opisany na trójkącie AMO po raz drugi w punkcie P . Wykaż, że punkty B, P, O są współliniowe.