

## Ekstremalne iloczyny

**Zadanie 1.** Rozwiąż w liczbach całkowitych  $x, y$  równanie  $2xy + 3x + y = 0$ .

**Zadanie 2.** Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych  $(p, q)$ , dla których liczba  $p^2 + pq + q^2$  jest kwadratem liczby całkowitej.

**Zadanie 3.** Wykaż, że jeżeli liczby naturalne  $a$  i  $b$  spełniają równanie  $a^2 + a = 3b^2$ , to liczba  $a+1$  jest kwadratem liczby całkowitej.

**Zadanie 4.** Znajdź wszystkie liczby pierwsze  $p$  o tej własności, że liczba

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

**Zadanie 5.** Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite  $m, n$ , dla których  $1 + 5 \cdot 2^m = n^2$ .

**Zadanie 6.** Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych równanie  $4^x + 3^z = z^2$ .

**Zadanie 7.** Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste  $a$  i  $b$  spełniające równanie  $a^2 - b^3 = 4$ .

**Zadanie 8.** Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite  $a, b$ , dla których liczba  $a^3 + b^3$  jest czwartą potęgą liczby pierwszej.

**Zadanie 9.** Wyznacz wszystkie liczby pierwsze  $p$  oraz  $q$ , takie że  $20p^3 - q^3 = 1$ .

**Zadanie 10.** Dodatnie liczby całkowite spełniają warunek  $n(4n + 1) = m(5m + 1)$ . Wykaż, że liczba  $n - m$  jest kwadratem liczby całkowitej.

**Zadanie 11.** Znajdź liczby całkowite  $x$  oraz  $y$ , spełniające równanie

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

**Zadanie 12.** Ze zbioru liczb całkowitych od 1 do 100 wybrano 51 elementów. Wykaż, że pewne dwa z wybranych elementów są względnie pierwsze.

**Zadanie 13.** Wykaż, że wśród dowolnych pięciu kolejnych dodatnich liczb całkowitych istnieje taka, która jest względnie pierwsza z pozostałymi czterema.

**Zadanie 14.** Dane są liczby całkowite  $a$  oraz  $b$ , takie że  $a > b > 1$  oraz liczba  $ab + 1$  jest podzielna przez  $a + b$ . Wykaż, że liczby  $a, b$  są względnie pierwsze.

**Zadanie 15.** Wykaż, że poniższy ciąg liczb

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \dots$$

złożony z dodatnich liczb całkowitych mających w zapisie dziesiętnym jedynie cyfrę 1, zawiera nieskończenie wiele elementów, z których każde dwa są względnie pierwsze.

**Zadanie 16.** Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb całkowitych  $m, n$  liczby

$$2^{2^m} + 1 \quad \text{oraz} \quad 2^{2^n} + 1$$

są względnie pierwsze.