

# GRAFOGRAFIA

## SEMINARIUM OMJ — 13 WRZEŚNIA 2025 R.

Podczas spotkania skupimy się przede wszystkim na zadaniach 1–12 oraz na prostych intuicjach i przydatnych własnościach. Rozwiązania lub komentarze do wszystkich poniższych zadań są dostępne na stronie internetowej OMJ: [omj.edu.pl](http://omj.edu.pl). Kliknięcie symbolu  odsyła bezpośrednio do pliku zawierającego odpowiednie rozwiązanie.

### Zadanie 1 (1/I/XVI OMJ).

Czy istnieje taka liczba sześciocyfrowa, której każde dwie kolejne cyfry tworzą pewną liczbę dwucyfrową będącą kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

### Zadanie 2 (6/Zestaw przykładowy części zadaniowej I etapu OMJ).

W pewnej grupie składającej się z sześciu osób każdy lubi dokładnie trzy inne osoby, przy czym jeśli osoba  $A$  lubi osobę  $B$ , to niekoniecznie  $B$  lubi  $A$ . Rozstrzygnij, czy wynika z tego, że pewne dwie osoby wzajemnie się lubią.

### Zadanie 3 (11/T/XVI OMJ).

W pewnej grupie składającej się z co najmniej trzech osób każdy zna dokładnie jedną spośród pozostałych osób (przyjmujemy, że jeśli osoba  $A$  zna osobę  $B$ , to  $B$  zna  $A$ ). Wynika z tego, że

- (a) istnieje osoba w tej grupie, którą wszyscy znają;
- (b) liczba osób w grupie jest parzysta;
- (c) można posadzić wszystkie osoby tej grupy przy okrągłym stole w taki sposób, by każdy siedział obok swojego znajomego.

### Zadanie 4 (11/T/XV OMJ).

W gronie  $n$  osób każda ma dokładnie trzech znajomych (zakładamy, że jeśli osoba  $A$  zna osobę  $B$ , to osoba  $B$  zna  $A$ ). Wynika z tego, że liczba  $n$  jest podzielna przez

- (a) 2;
- (b) 3;
- (c) 4.

### Zadanie 5 (9/T/XIV OMJ).

Podczas spotkania grupy 6 osób wymieniono dokładnie 9 uścisków dłoni, przy czym każda para osób wymieniła co najwyżej jeden uścisk dłoni. Wynika z tego, że

- (a) pewna osoba wymieniła co najmniej 4 uściski dłoni;
- (b) pewna osoba wymieniła dokładnie 3 uściski dłoni;
- (c) każdy wymienił co najmniej 1 uścisk dłoni.

### Zadanie 6 (4/II/IV OMJ).

W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

### Zadanie 7 (3/II/XVII OMJ).

Niech  $n$  będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb 1, 2, 3, ..., 100 pomalowano jednym z  $n$  kolorów w taki sposób, że każde dwie różne liczby o sumie podzielnej przez 4 zostały pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę  $n$ , dla której taka sytuacja jest możliwa.

### Zadanie 8 (14/T/XVII OMJ).

W gronie sześciu osób każda zna dokładnie trzy spośród pozostałych pięciu osób, przy czym jeśli osoba  $A$  zna osobę  $B$ , to również osoba  $B$  zna osobę  $A$ . Wynika z tego, że

- (a) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się znają;
- (b) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się nie znają;
- (c) można te sześć osób podzielić na trzy pary znających się osób.

### Zadanie 9 (3/III/XVI OMJ).

W turnieju badmintonu uczestniczyło 16 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał co najwyżej jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju okazało się, że każdy z zawodników wygrał inną liczbę meczów. Wykaż, że każdy z zawodników przegrał inną liczbę meczów.

### Zadanie 10 (14/T/XVIII OMJ).

W turnieju badmintonu wzięto udział 6 osób, każde dwie osoby rozegrały dokładnie jeden mecz i żaden mecz nie zakończył się remisem. Wynika z tego, że istnieje osoba, która wygrała

- (a) nieparzystą liczbę meczów;
- (b) parzystą liczbę meczów;
- (c) dokładnie 2 mecze lub dokładnie 3 mecze.

### Zadanie 11 (3/II/VI OMG).

W turnieju tenisa stołowego wzięto udział  $n$  zawodników ( $n \geq 4$ ). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykaż, że istnieją tacy trzej zawodnicy  $A$ ,  $B$  i  $C$ , że  $A$  wygrał z  $B$ ,  $B$  wygrał z  $C$  oraz  $C$  wygrał z  $A$ .

### Zadanie 12 (23/FLOMG).

W pewnej grupie jest  $n$  osób, przy czym  $n \geq 4$ . Dowolne cztery osoby z tej grupy można usadzić przy okrągłym stole tak, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoim znajomym i nieznanym. Znajdź wszystkie wartości  $n$ , dla których taka sytuacja jest możliwa.

### Zadanie 13 (2/I/IV CPSJ).

Rozstrzygnij, czy wierzchołki 30-kąta foremnego można ponumerować liczbami 1, 2, ..., 30 w taki sposób, aby suma numerów każdych dwóch sąsiednich wierzchołków była kwadratem pewnej liczby naturalnej.

#### Zadanie 14 (17/FLOMG).

Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na małe prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów. Udowodnij, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.

#### Zadanie 15 (15/T/XIX OMJ).

W gronie siedmiu osób każdy ma co najmniej 3 znajomych spośród pozostałych osób (przyjmujemy, że jeśli  $A$  jest znajomym  $B$ , to również  $B$  jest znajomym  $A$ ). Wynika z tego, że w tym gronie

- (a) pewna osoba ma co najmniej 4 znajomych spośród pozostałych osób;
- (b) pewne dwie osoby mają co najmniej 3 wspólnych znajomych;
- (c) pewne trzy osoby znają się wzajemnie.

#### Zadanie 16 (3/II/XV OMJ).

W pewnym turnieju wzięli udział chłopcy i dziewczęta. Każda osoba rozegrała dokładnie jeden mecz z każdą inną osobą, nie było remisów. Po turnieju okazało się, że każdy przegrał co najmniej raz. Ponadto każdy chłopiec przegrał inną liczbę meczów niż każdy z pozostałych chłopców. Wykaż, że pewna dziewczynka wygrała mecz z pewnym chłopcem.

#### Zadanie 17 (5/I/XV OMJ).

W turnieju wzięto udział 8 zawodników. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, który zakończył się zwycięstwem jednego z nich lub remisem. Zwycięzca meczu otrzymywał 2 punkty, jego przeciwnik 0 punktów, a w przypadku remisu obaj zawodnicy uzyskiwali po 1 punkcie. Po rozegraniu wszystkich meczów okazało się, że każdy zawodnik miał tę samą liczbę punktów. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba meczów, które zakończyły się remisem? Odpowiedź uzasadnij.

#### Zadanie 18 (5/II/XIII OMJ).

Każdą liczbę całkowitą pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

#### Zadanie 19 (5/III/XII OMJ).

Na stole leży  $n$  zapatek, które stanowią  $n$  jednoelementowych stosów. Adam chce połączyć je w jeden stos  $n$ -elementowy. Będzie to robił przy użyciu  $n - 1$  operacji, z których każda polega na połączeniu dwóch stosów w jeden. Adam umówił się z Bartkiem, że za każdym razem, gdy Adam połączy stos  $a$ -elementowy ze stosem  $b$ -elementowym, dostanie od Bartka  $a \cdot b$  cukierków. Jaka jest największa możliwa liczba cukierków, które może dostać Adam po wykonaniu  $n - 1$  operacji? Odpowiedź uzasadnij.

#### Zadanie 20 (2/III/VIII OMG).

Na przyjęciu spotkało się 99 osób. Wiadomo, że wśród każdych trzech osób można wskazać taką, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Wykaż, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

### Zadanie 21 (2/III/IV OMG).

W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło  $2n$  zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem co najwyżej jeden mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie  $n$  zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych  $n$  zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie  $n$ , dla których taka sytuacja jest możliwa.

### Zadanie 22 (4/II/V OMG).

Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

### Zadanie 23 (4/I/X OMG).

Na przyjęcie przyszło  $n$  osób. Początkowo każdy miał dokładnie 3 znajomych wśród pozostałych osób obecnych na przyjęciu. W trakcie przyjęcia niektóre osoby poznały się, w wyniku czego pod koniec przyjęcia każdy miał wśród pozostałych obecnych dokładnie 4 znajomych. Wyznacz wszystkie liczby  $n$ , dla których opisana sytuacja jest możliwa. (Przyjmujemy, że jeśli osoba  $A$  zna osobę  $B$ , to osoba  $B$  zna osobę  $A$ .)

### Zadanie 24 (2/III/X OMG).

Każdą liczbę całkowitą dodatnią pomalowano na pewien kolor. Okazało się, że dla każdej pary liczb całkowitych  $a, b$  większych od 1 liczby  $a+b$  i  $ab$  są tego samego koloru. Wykaż, że wszystkie liczby większe od 4 zostały pomalowane tym samym kolorem.

### Zadanie 25 (3/D/II CPSJ).

W pewnej grupie jest  $n \geq 5$  osób, przy czym każde dwie osoby, które się nie znają, mają dokładnie jednego wspólnego znajomego oraz żadna osoba nie zna wszystkich pozostałych. Udowodnij, że można 5 spośród danych  $n$  osób usadzić przy okrągłym stole tak, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi (a) znajomymi; (b) nieznanymi.

### Zadanie 26 (5/D/III CPSJ).

Początkowo na tablicy napisana jest liczba 1. Jeśli na tablicy znajduje się liczba  $a$ , to można dopisać jeszcze taką dodatnią liczbę całkowitą  $b$ , że liczba  $a + b + 1$  jest dzielnikiem liczby  $a^2 + b^2 + 1$ . Czy każda dodatnia liczba całkowita może w pewnym momencie pojawić się na tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

### Zadanie 27 (5/D/VII CPSJ).

Przy okrągłym stole siedzi  $2n$  osób ( $n \geq 2$ ) w taki sposób, że każdy siedzi naprzeciwko swojego nieznanego oraz pomiędzy swoimi znajomymi. Wykaż, że te same osoby mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każdy siedział pomiędzy swoim znajomym a nieznanym.