Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nr 9
czerwiec 2013
ISSN 2300-0708

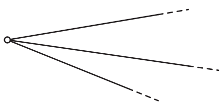
Jak znaleźć wielościan?

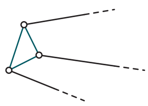
O tym, w jakie pułapki można wpaść, próbując podać przykłady wielościanów spełniających określone warunki, można przeczytać w *Kwadracie nr 7* (grudzień 2012). W tym artykule skupimy się na omówieniu metod przydatnych w szukaniu poprawnych przykładów. Zobrazujemy je na bazie następującego zadania, które pojawiło się na finale tegorocznej, VIII edycji OMG.

Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian i w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi?

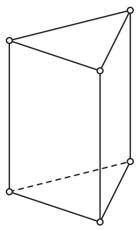
Taki wielościan istnieje (i to niejeden), a jego konstrukcję *warto zacząć od dobrze znanej bryły*, takiej jak sześcian, graniastosłup czy ostrosłup, a następnie coś do niej *dobudować*, albo coś od niej *odciąć*. Czynności te można powtarzać wielokrotnie i na wiele sposobów.

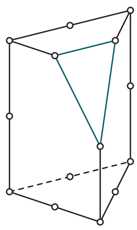
Wprowadźmy najpierw pojęcia, którymi będziemy się posługiwać w artykule.

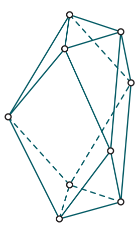

rys. 1


rys. 2

Narożem n-kątnym wielościanu nazwiemy taki jego wierzchołek, w którym schodzi się n krawędzi (rys. 1 przedstawia naroże trójkątne). Natomiast *odcięciem* naroża nazwiemy przecięcie bryły płaszczyzną blisko wierzchołka, a następnie *usunięcie* tej części, która zawiera dany wierzchołek (rys. 2 przedstawia odcięcie naroża trójkątnego z rys. 1).


rys. 3


rys. 4


rys. 5

Przy doklejaniu ostrosłupa do pewnej ściany wielościanu (jako na podstawie), ostrosłup powinien być na tyle niski, aby żadna jego ściana boczna nie leżała w płaszczyźnie żadnej ze ścian wielościanu oraz aby uzyskana nowa bryła pozostała wypukła. Taki sposób doklejenia nazwiemy *przyzwoitym*.

Przechodzimy do konstrukcji wielościanów spełniających warunki zadania.

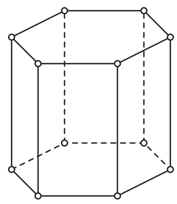
Sposób I

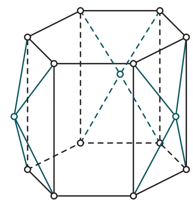
Rozważmy *graniastosłup* o podstawie $(2n+1)$-kąta (rys. 3 przedstawia przypadek $n=1$). Na każdej krawędzi wybierzmy po jednym punkcie (mogą to być na przykład środki krawędzi), a następnie *odetnijmy* naroża graniastosłupa płaszczyznami przechodzącymi przez punkty wybrane na tych krawędziach, które schodzą się w danym wierzchołku (rys. 4 przedstawia jedno z takich odcięć).

Wykonując $4n+2$ odcięć naroży, dostajemy bryłę, której wszystkie wierzchołki są wybranymi przez nas wcześniej punktami na krawędziach i w każdym z nich schodzą się 4 krawędzie (rys. 5. przedstawia otrzymany wielościan dla $n=1$). Każde odcięcie naroża zwiększa liczbę ścian o 1, a zatem skoro na początku mieliśmy $2n+3$ ściany, to liczba ścian końcowego wielościanu będzie równa liczbie nieparzystej $6n+5$.

Sposób II

Tym razem zacznijmy od *graniastosłupa*, którego podstawą jest $(4n+2)$-kąt (na rys. 6 przyjmujemy $n=1$). Następnie na co drugiej ścianie bocznej, jako na podstawie, doklejmy *w przyzwoity sposób* ostrosłupy czworokątne (rys. 7). Otrzymana bryła ma wtedy $10n+7$, czyli nieparzystą liczbę ścian, a w jej każdym wierzchołku schodzą się dokładnie 4 krawędzie.

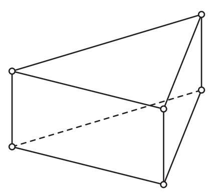

rys. 6

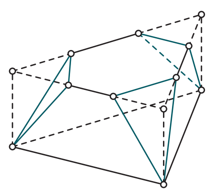

rys. 7

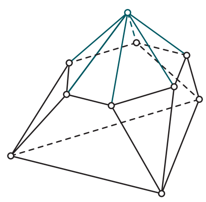
Sposób III

Rozpoczniemy od *graniastosłupa*, którego podstawą jest n-kąt, przy czym $n \geqslant 3$ (rys. 8 obrazuje przypadek $n=3$).

Nazwijmy podstawy *dolną* i *górną*. Na każdej krawędzi górnej podstawy wybierzmy po 2 punkty, na przykład tak, aby były one wierzchołkami $2n$-kąta foremnego. *Odetnijmy* wszystkie naroża przy górnej podstawie płaszczyznami przechodzącymi przez pary wybranych punktów oraz odpowiednie wierzchołki dolnej podstawy (rys. 9). Następnie do $2n$-kąta, który został wycięty z górnej podstawy, doklejmy *w przyzwoity sposób* ostrosłup $2n$-kątny (rys. 10).


rys. 8

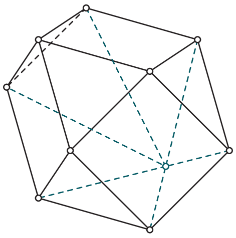

rys. 9

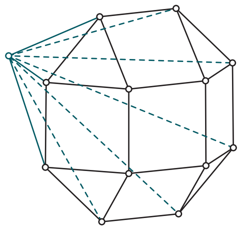

rys. 10

Otrzymaliśmy wielościan, który ma $4n+1$ — czyli nieparzystą liczbę — ścian, a w każdym wierzchołku schodzą się 4 krawędzie lub $2n$ krawędzi.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jeśli dla $n=3$ lub $n=4$ wyjściowy graniastosłup n-kątny zastąpimy ściętym ostrosłupem n-kątnym o dolnej podstawie mniejszej od górnej, to otrzymamy wielościany przedstawione na rysunkach 11 i 12 (nieco obrócone w stosunku do wyjściowych konfiguracji).


rys. 11


rys. 12

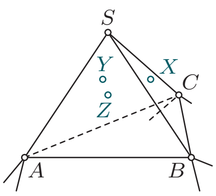
W celu ułatwienia dalszego zapisu każdy wielościan wypukły spełniający warunki zadania nazwiemy *dobrym*.

Opiszemy teraz dwie metody modyfikowania znalezionych przykładów dobrych wielościanów. Pozwoli nam to uzyskać wielościany dobre o *dowolnej*, większej od 9, nieparzystej liczbie ścian.

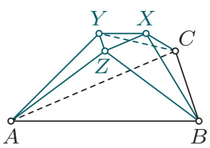
Metoda I

Niech $ABCS$ będzie ostrosłupem trójkątnym o podstawie ABC (rys. 13). Na ścianach BCS, CAS i ABS wybierzmy (dowolnie) odpowiednio punkty X, Y i Z, a następnie *obetnijmy* ostrosłup $ABCS$ w taki sposób, aby otrzymać ośmiościan $ABCXYZ$ (rys. 14). Ośmiościan taki uzyskamy, tnąc czworościan kolejno płaszczyznami AYZ, BZX, CXY, XYZ i pozostawiając po każdym cięciu tę część, która nie zawiera punktu S.

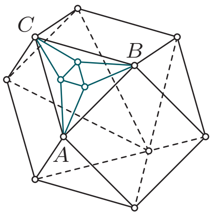
Załóżmy teraz, że pewien dobry wielościan ma przynajmniej jedną ścianę trójkątną. Wówczas możemy *dokleić* do tej ściany ośmiościan $ABCXYZ$, oczywiście *w przyzwoity sposób*, czyli tak, aby wyjściowy ostrosłup $ABCS$ był odpowiednio niski.



rys. 13



rys. 14



rys. 15

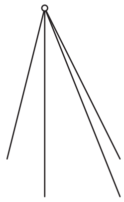
Liczba ścian otrzymanego wielościanu jest o 6 większa od liczby ścian wyjściowego wielościanu dobrego, czyli jest nieparzysta. Ponadto we wszystkich wierzchołkach schodzi się w dalszym ciągu parzysta liczba krawędzi, a więc otrzymany wielościan jest dobry.

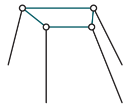
Rysunek 15 przedstawia dobry wielościan o 19 ścianach otrzymany z wielościanu pokazanego na rysunku 11.

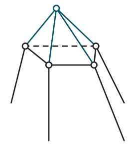
Metoda II

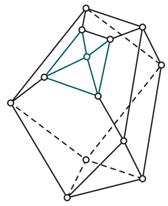
Załóżmy, że dobry wielościan posiada co najmniej jedno naroże $2n$-kątne (rys. 16). *Odetnijmy* je od naszego wielościanu (rys. 17), a na powstałym w przekroju $2n$-kącie, jako na podstawie, doklejmy ostrosłup, jak zwykle *przyzwoicie* (rys. 18).

Otrzymana bryła ma o $2n$ ścian więcej od wyjściowego dobrego wielościanu i w każdym z wierzchołków schodzi się nadal parzysta liczba krawędzi. Rysunek 19 przedstawia dobry wielościan o 15 ścianach otrzymany z wielościanu pokazanego na rysunku 5.


rys. 16


rys. 17

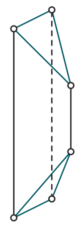

rys. 18

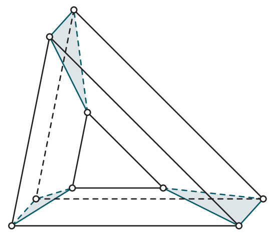

rys. 19

Na bazie skonstruowanych już przykładów można uzasadnić, że istnieje dobry wielościan o dowolnej, większej od 9, liczbie ścian. Rzeczywiście, w sposobie III liczba ścian dobrego wielościanu jest postaci $4n+1$, gdzie $n \geqslant 3$. Z kolei wybierając dowolną ścianę trójkątną w tym wielościanie i stosując metodę I, dostajemy dobry wielościan o liczbie ścian równej $4n+7$ dla $n \geqslant 3$. Brakujące (powyżej 9) nieparzyste liczby ścian 11 i 15 posiadają wielościany odpowiednio na rysunkach 5 i 19.

Warunki zadania nakładają na nas poszukiwania przykładów wśród brył wypukłych. Pomijając to wymaganie, można znaleźć *niewypukły* wielościan o 9 ścianach, który spełnia pozostałe warunki zadania (rys. 21). Powstaje on ze sklejenia ze sobą ścianami trójkątnymi trzech brył widocznych na rysunku 20.

Proponujemy Czytelnikowi rozstrzygnięcie, czy istnieje dobry, a więc także *wypukły*, wielościan o mniejszej od 11 liczbie ścian.


rys. 20


rys. 21

Na koniec kilka problemów do samodzielnego rozważenia przez Czytelnika. Wskazówki podamy w następnym numerze.

Zadanie 1.

Rysunek 21 przedstawia niewypukłą bryłę, która ma 9 ścian. Czy istnieje wielościan niewypukły, który ma mniej niż 9 ścian?

Zadanie 2.

Czy istnieje wielościan wypukły o dziewięciu ścianach, który ma trzy ściany trójkątne, trzy czworokątne i trzy pięciokątne?

Zadanie 3.

Czy istnieje dobry wielościan, w którym dokładnie jedna ściana ma parzystą liczbę boków?

Zadanie 4.

Czy istnieje wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi, a w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi?

Łukasz Bożyk

Kolejne medale Polek

W dniach 8–14 kwietnia 2013 r. odbyła się w mieście Luksemburg, stolicy kraju o tej samej nazwie, II Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt (European

Girls' Mathematical Olympiad, EGMO). W skład polskiej reprezentacji, wyłonionej na podstawie wyników zeszłorocznej Olimpiady Matematycznej, weszły Basia oraz aż trzy Anie:

- Anna Czerwińska (XIII LO w Szczecinie),
- Anna Hoduń (V LO w Krakowie),
- Barbara Mroczek (XIV LO w Warszawie),
- Anna Olech (XIV LO w Warszawie).

Każda z dziewcząt była w przeszłości laureatką OMG.

Chociaż zawody EGMO odbywały się dopiero po raz drugi, to można już zaobserwować ich rosnącą popularność. Wzięły w nich udział delegacje 22 krajów (o 3 więcej niż w roku ubiegłym), łącznie 87 uczennic (o 17 więcej niż rok temu).

Pierwszego dnia po przyjeździe do Luksemburga zawodniczki uczestniczyły w uroczystej ceremonii otwarcia Olimpiady. Same zawody odbyły się 10 i 11 kwietnia. Każdego z tych dni dziewczęta miały 4,5 godziny na samodzielne rozwiązanie 3 zadań wybranych uprzednio przez komisję spośród propozycji nadesłanych przez uczestniczące kraje (wśród wybranych zadań znalazło się jedno zaproponowane przez Polskę). Za każde z zadań można było otrzymać od 0 do 7 punktów.

Żadnej z zawodniczek nie udało się zdobyć maksymalnej liczby 42 punktów. Zwyciężczyni Olimpiady — Danielle Wang z USA — ukończyła zawody z wynikiem 38 punktów. Danielle, mimo że ma dopiero 15 lat i była jedną z młodszych uczestniczek, wygrała EGMO już po raz drugi.

Polki wypadły znakomicie — wszystkie wróciły do kraju z medalami. Szczególne wyrazy uznania należą się Basi Mroczek, która ze wspaniałym wynikiem 29 punktów ukończyła zawody na czwartym miejscu w klasyfikacji indywidualnej. Złoty medal odebrała z rąk premiera Luksemburga Jean-Claude Junckera. Pozostałe dziewczęta również uzyskały bardzo dobre rezultaty: Ania Hoduń wywalczyła srebrny, a Ania Czerwińska oraz Ania Olech — brązowe medale. Gratulujemy!

Pierwsze miejsce w klasyfikacji drużynowej zajęły ex aequo 3 kraje: Białoruś, Serbia i USA, zdobywając po 99 punktów. Czwarte miejsce przypadło Bułgarii (90 punktów), natomiast piąte Polkom (89 punktów).

Pobyt w Luksemburgu trwał cały tydzień. Było więc mnóstwo czasu na zwiedzanie, integrację z reprezentacjami innych krajów oraz zapewnione przez organizatorów atrakcje. Zakwaterowanie w schronisku młodzieżowym w pobliżu malowniczego centrum umożliwiało częste spacery po przepięknych zakątkach miasta. Ostatniego dnia uczestniczki Olimpiady udały się pociągiem na całodniową wycieczkę do miasteczka Clervaux na północy kraju. Dziewczęta miały okazję zwiedzić opactwo benedyktyńskie oraz kilka zabytkowych zamków i kościołów, a także pospacerować po górzystym terenie wokół miasteczka.

Udział naszego kraju w zawodach EGMO cieszy się niegasnącym zainteresowaniem Telewizji Polskiej. Podobnie jak w zeszłym roku, reprezentacja gościła w porannym programie *Kawa czy herbata?* w TVP1. Link do nagrania rozmowy z dziewczętami można znaleźć na naszej stronie internetowej: `www.omg.edu.pl/media`.

W przyszłym roku Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt odbędzie się w Turcji. Plotka głosi, że swój udział zapowiada ponad czterdzieści krajów europejskich i nie tylko! Wygląda więc na to, że spełniają się nadzieje organizatorów — zawody EGMO zyskują coraz większą renomę i ugruntowują swoją pozycję na arenie najbardziej prestiżowych międzynarodowych imprez matematycznych.

Więcej o zawodach EGMO można dowiedzieć się ze strony internetowej Olimpiady: `www.egmo.org`.

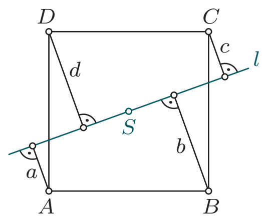
Joanna Ochremiak
wiceprzewodnicząca delegacji polskiej

Urok zbioru „mi”

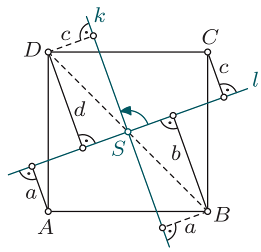
Praca „Urok zbioru μ”, którą napisałem w 2010 roku na XXXII Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki czasopisma *Delta*, została zainspirowana następującym zadaniem pochodzącym z OMG.

Zadanie 1. (IV OMG, zawody I stopnia)

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1 oraz prosta l przechodząca przez jego środek S. Niech a, b, c, d oznaczają odpowiednio odległości punktów A, B, C, D od prostej l. Wykaż, że $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ (rys. 22).



rys. 22



rys. 23

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $d(X,m)$ odległość punktu X od prostej m.

Obróćmy prostą l wokół punktu S o $90°$ (rys. 23). W efekcie uzyskamy prostą k, która przechodzi przez punkt S i jest prostopadła do prostej l. Ponieważ w wyniku tego obrotu punkt A przechodzi na B, a punkt C na D, więc $d(B,k)=d(A,l)=a$ oraz $d(D,k)=d(C,l)=c$. Wobec tego na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $a^2+b^2=BS^2$ oraz $c^2+d^2=DS^2$. Stąd

$$a^2+b^2+c^2+d^2=BS^2+DS^2=1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wykazaliśmy zatem, że suma kwadratów odległości punktów A, B, C, D od prostej l *nie zależy od wyboru prostej l przechodzącej przez punkt S*. Tę szczególną własność punktu S wyróżnimy za pomocą następującej definicji.

Definicja

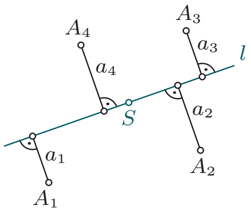
Punkt S nazwiemy *μ-punktem układu punktów $A_1,A_2,\ldots,A_n$*, jeśli posiada on następującą własność: suma kwadratów odległości punktów $A_1,A_2,\ldots,A_n$ od dowolnie obranej prostej l przechodzącej przez punkt S nie zależy od wyboru prostej l (rys. 24).

W świetle powyższego, przytoczone zadanie z OMG można wyrazić krótko: środek S kwadratu jest μ-punktem jego wierzchołków A, B, C, D.

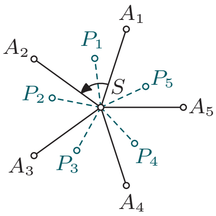
Jednym z wyników, jaki uzyskałem w pracy, jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Każdy układ punktów na płaszczyźnie posiada dokładnie jeden lub dokładnie dwa μ-punkty.

Opierając się na tym twierdzeniu, można łatwo rozwiązać nieco ogólniejsze zadanie.



rys. 24



rys. 25

Zadanie 2.
Niech $A_1A_2\ldots A_n$ $(n\geqslant 3)$ będzie n-kątem foremnym o środku S. Wykaż, że S jest jedynym μ-punktem wierzchołków $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Rozwiązanie
Niech P_1 będzie μ-punktem danego układu punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (zob. rys. 25 dla $n=5$). Przypuśćmy, że $P_1 \neq S$.

Ponieważ obrót wokół punktu S o kąt $\frac{1}{n}\cdot 360°$ pozostawia w miejscu nasz wielokąt foremny, więc punkt P_2, będący obrazem punktu P_1 przy tym obrocie, również jest μ-punktem danego układu punktów $A_1, A_2 \ldots, A_n$. Poprzez powtarzanie obrotu otrzymamy kolejno n różnych μ-punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$. To stoi w sprzeczności z twierdzeniem, że μ-punkty są najwyżej dwa.

Dowiedliśmy w ten sposób, że żaden punkt różny od S nie może być μ-punktem, a ponieważ wiemy, że μ-punkt istnieje, więc musi być nim punkt S. To kończy rozwiązanie zadania.

Wykazaliśmy zatem, że *dla każdej prostej l przechodzącej przez środek wielokąta foremnego, suma kwadratów odległości wierzchołków wielokąta od prostej l nie zależy od wyboru tej prostej*. Dowiedliśmy także, że środek wielokąta jest *jedynym* punktem o tej własności.

W celu sprawdzenia, czy punkt S jest μ-punktem układu punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definicja nakazuje obliczyć sumę kwadratów odległości danych punktów od *każdej* możliwej prostej przechodzącej przez S. Okazuje się, że wystarczające jest rozpatrzenie zaledwie trzech prostych. Udowodniłem mianowicie w pracy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Jeśli suma kwadratów odległości danych punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ od każdej spośród trzech różnych prostych przechodzących przez pewien punkt S przyjmuje tę samą wartość, to punkt S jest μ-punktem układu punktów A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

Twierdzenie to można wykorzystać do rozwiązania zadania 2 innym sposobem. Szczegóły pozostawiam Czytelnikom.

W pracy scharakteryzowałem także μ-punkty dla dowolnego trójkąta oraz badałem własności μ-punktów dla układów w przestrzeni trójwymiarowej.

Zacytowane przeze mnie wyniki zostały uzyskane przy pomocy narzędzi geometrii analitycznej i ich dowody wykraczają poza ramy tego artykułu. Ze względu na prostotę samych wyników można jednak przypuszczać, że da się je uzyskać elementarnymi metodami. Gorąco zachęcam Czytelników do znalezienia takich dowodów.

Kończąc, chciałbym zaproponować dwa zadania dla Czytelników. Wskazówki do nich znajdą się w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 3.
Wyznacz μ-punkty układu dwóch punktów A, B.

Zadanie 4.
Wykaż, że jeśli środek ciężkości S trójkąta ABC jest μ-punktem wierzchołków A, B, C, to trójkąt ABC jest równoboczny.

Michał Miśkiewicz

Dopisek od redakcji

Autor powyższego artykułu, laureat II edycji OMG, skromnie nie napisał, że jego praca zdobyła złoty medal podczas wspomnianego na początku XXXII Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki, a w 2011 roku medal brązowy na XXIII Konkursie Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej.

Jak widać zadania OMG stanowią doskonałą inspirację do stawiania dalszych pytań i rozwiązywania ciekawych problemów. Gratulujemy Michałowi pierwszych sukcesów naukowych i czekamy na osoby, które pójdą w jego ślady.

Pracę Michała Miśkiewicza można pobrać z naszej strony internetowej: `www.omg.edu.pl/gazetka-omg`.

Chochlik wakacyjny

Rosnący poziom przygotowania uczestników OMG znacząco utrudnił w tym roku dobór tekstów do rubryczki „Chochlik Olimpijski”. Rozwiązania zadań konkursowych zdają się cechować coraz większą dojrzałością redakcyjną. Szczęśliwie dla „Chochlika”, źródłem prawdziwych perełek pozostają problemy kombinatoryczne, których rozwiązania wyzwalają ogromny potencjał twórczy zawodników. Poniższe trzy obserwacje dotyczące zadania 4 zawodów stopnia II świadczą o wielkiej przenikliwości umysłów młodych matematyków:

- (obserwacja poznawcza) *Ograniczeniem liczby kolorów jest jedynie ich ilość znana człowiekowi.*
- (obserwacja warunkowa) *Zależy, jaką nam dano płaszczyznę.*
- (obserwacja praktyczna) *Możemy pomalować płaszczyznę wzdłuż i wszerz.*

A oto przykład trudności, jaką napotkał jeden z rozwiązujących:

- *Wszystko jest w porządku, gdy patrzymy na obrazek pionowo. Problem zaczyna się, gdy patrzymy poziomo.*

Tym humorystycznym akcentem żegnamy się z Czytelnikami w tym roku szkolnym, życząc udanych wakacji i pionowego (czyt. beztroskiego) wypoczynku. ;)

Redaguje zespół w składzie: Urszula Pastwa, Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: `kwadrat.omg@gmail.com`