Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 11
grudzień 2013
ISSN 2300-0708

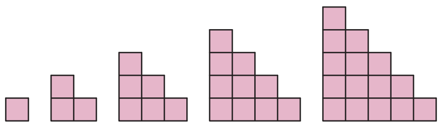
Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liczby trójkątne i czworościenne

Niektóre problemy dotyczące liczb naturalnych można rozważać metodami geometrycznymi — na przykład reprezentując liczbę n przez figurę złożoną z n kwadratów jednostkowych. Okazuje się, że to podejście prowadzi czasem do zaskakujących wniosków, których uzyskanie w inny sposób może być naprawdę trudne. Typowym przykładem są liczby *trójkątne*: n-tą liczbą trójkątną nazywamy sumę początkowych n dodatnich liczb całkowitych:

$$T_n = 1+2+3+\ldots+n.$$

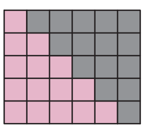
Dlaczego akurat trójkątne? Właśnie ze względu na ich ciekawą interpretację geometryczną. Ustawiając jeden pod drugim paski o długościach będących kolejnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, dostajemy trójkątne układy (rys. 1).

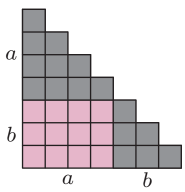

rys. 1

Pojawia się naturalne pytanie, czy istnieje wzór pozwalający szybko obliczać wartości liczb trójkątnych. Odpowiedź jest twierdząca i wiele osób zapewne już się z tym wzorem spotkało:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Aby przekonać się, że jest on poprawny, wystarczy do układu reprezentującego liczbę trójkątną T_n dołączyć taki sam trójkąt, tylko obrócony o $180°$ (rys. 2). Dostaniemy prostokąt, którego pole to z jednej strony $2T_n$, z drugiej zaś oczywiście $n(n+1)$.


rys. 2



rys. 3

Metoda *uzyskiwania prostokąta* okazuje się skuteczna również w wielu innych sytuacjach. Spójrzmy na przykład na następujące

Zadanie 1.

Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Znajdź wartość wyrażenia $T_{a+b} - T_a - T_b$.

Rozwiązanie

Popatrzmy na liczbę T_{a+b} geometrycznie — jest to *trójkąt* o boku $a+b$. Żeby odjąć od tej liczby T_a i T_b, wystarczy odciąć od tego trójkąta dwa mniejsze, odpowiednio o bokach a i b (rys. 3). Figura, którą otrzymamy, reprezentuje wynik szukanej różnicy, a jest nią prostokąt o wymiarach $a \times b$. Wobec tego szukaną wartością jest iloczyn ab.

Oczywiście po krótkich rachunkach ten sam wynik otrzymalibyśmy korzystając wprost ze wzoru (1), warto jednak zauważyć, że w przedstawionym rozwiązaniu wzór ten nie jest w żaden sposób wykorzystywany.

Prezentujemy tu jeszcze kilka zadań, związanych z liczbami trójkątnymi, do samodzielnego rozwiązania. Najlepiej spróbować rozwiązać je — oczywiście — geometrycznie.

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $T_n + T_{n+1}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 3.

Wykaż, że jeśli T_n jest liczbą trójkątną, to liczba $8T_n + 1$ jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

Zadanie 4.

Wykaż, że jeśli T_n jest liczbą trójkątną, to liczba $9T_n + 1$ także jest liczbą trójkątną.

Zadanie 5.

Niech a, b i c będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że

$$T_{a+b+c} + T_a + T_b + T_c = T_{a+b} + T_{b+c} + T_{c+a}.$$

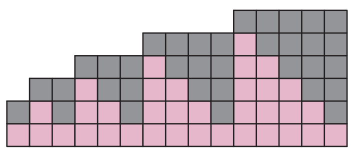
Od liczb trójkątnych można pójść o krok dalej. Zastanówmy się mianowicie, co się stanie, gdy będziemy dodawać do siebie kolejne liczby trójkątne, tzn. co ciekawego można powiedzieć o liczbach postaci

$$S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n.$$

Liczby S_n nazywamy *czworościennymi* (lub *tetraedralnymi*). Jeśli bowiem zamiast kwadratów jednostkowych rozpatrzymy sześciany, to układając na sobie kolejne trójkątne układy otrzymamy przestrzenne, czworościenne struktury. I w przypadku takich liczb istnieje ładny, zwięzły wzór:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \tag{2}$$

Geometryczne uzasadnienie tej równości jest nieco trudniejsze niż w przypadku liczb trójkątnych. Ustawmy obok siebie, w szeregu, n trójkątów reprezentujących liczby $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Teraz każdy z nich dopełnijmy do prostokąta, doklejając identyczny trójkąt (rys. 4).

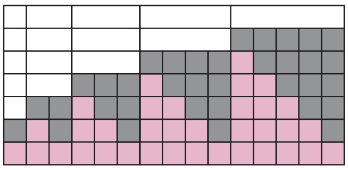

rys. 4

Zastanówmy się, czego brakuje, aby z całej figury dostać prostokąt. Górną część rysunku wystarczy wypełnić poziomymi pasami o szerokości 1, z których każdy

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

kolejny jest coraz dłuższy: najniższy pas ma długość 1, następny $1+2$, kolejny $1+2+3$ itd. i w końcu ostatni (najwyższy) $1+2+3+\ldots+n$ (rys. 5).

Okazało się, że pasy reprezentują kolejne liczby trójkątne! Stąd wynika, że ich suma, czyli cała biała figura, której brakuje nam do prostokąta, to nic innego jak tylko $T_1+T_2+\ldots+T_n=S_n$.



rys. 5

Ostatecznie nasz prostokąt o wymiarach $T_n\times(n+2)$ ma pole równe $3S_n$. To oznacza, że

$$S_n=\frac{T_n(n+2)}{3},$$

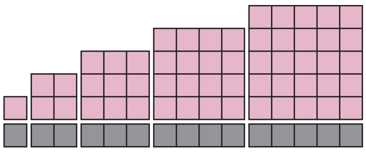
która to zależność po skorzystaniu ze wzoru (1) okazuje się być wzorem (2). Jak widać, geometryczne metody znowu nas nie zawiodły.

Uzyskany rezultat możemy wykorzystać na przykład do wyznaczenia wzoru na sumę kwadratów początkowych n liczb naturalnych. Niech

$$K_n=1^2+2^2+\ldots+n^2.$$

Porównując rysunki 4 oraz 6, widzimy, że

$$K_n=2S_n-T_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



rys. 6

Na koniec jeszcze kilka zadań, które pozwalają na rozpatrzenie ciekawych konfiguracji i znalezienie rozwiązania, w którym praktycznie nie ma liczenia. Warto też samodzielnie poszukać interesujących figur i układów.

Zadanie 6.
Znajdź zwięzły wzór na sumę

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2.$$

Zadanie 7.
Udowodnij, że jeżeli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+n\cdot 1=S_n$.

Zadanie 8.
Znajdź zwięzły wzór na sumę

$$K_1+K_2+\ldots+K_n.$$

Zadanie 9.
Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Znajdź wartość wyrażenia $K_{a+b}-K_a-K_b$.

Zadanie 10.
Udowodnij, że $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=T_n^2$.

Zadanie 11. (III OMG, zawody II stopnia)
Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych?

Łukasz Bożyk

Kwadraty i dzielniki

Jak wiele można dowiedzieć się o liczbie tylko na podstawie liczby jej dzielników? Ile umiemy powiedzieć o dzielnikach danej liczby, bez wyznaczania ich? Okazuje się, że całkiem sporo! Ile oraz co konkretnie, przyjrzymy się na przykładzie pewnych twierdzeń, wiążących własności liczb z własnościami i liczbą ich dzielników. Szczególną uwagę poświęcimy liczbom, które są kwadratami.

Twierdzenie 1.
Dodatnia liczba całkowita ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowód
Zauważmy, że jeśli liczba dodatnia d jest dzielnikiem liczby dodatniej n, to również liczba $\frac{n}{d}$ jest dzielnikiem liczby n. Ponadto z zależności

$$d\cdot\frac{n}{d}=n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}$$

wynika, że jeśli $d>\sqrt{n}$, to $\frac{n}{d}<\sqrt{n}$. Wobec tego każdy dzielnik d liczby n większy od $\sqrt{n}$ możemy połączyć w parę z dzielnikiem $\frac{n}{d}$, który jest od $\sqrt{n}$ mniejszy.

Jeśli zatem liczba n nie jest kwadratem liczby całkowitej, to w ten sposób dobieramy w pary *wszystkie* dodatnie dzielniki liczby n, a to oznacza, że liczba n ma parzystą liczbę dzielników. Natomiast w przypadku, gdy n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej, np. $n=k^2$, to połączone w pary są wszystkie dzielniki liczby n poza jednym: liczbą $k=\sqrt{n}$.

Wobec tego liczba n ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy n jest kwadratem, co kończy dowód.

Uwaga
Aby sprawdzić, czy liczba jest pierwsza, wystarczy zweryfikować, czy ma dzielniki pierwsze *mniejsze lub równe od jej pierwiastka* — większych nie trzeba badać!

W powyższym dowodzie zauważyliśmy bowiem, że jeśli liczba d dzieli n, to również liczba $\frac{n}{d}$ dzieli n. Ponadto jeżeli $d>\sqrt{n}$, to $\frac{n}{d}<\sqrt{n}$. Stąd wniosek, że jeśli n nie ma dzielników mniejszych od $\sqrt{n}$, innych niż 1, to nie może mieć też większych, innych niż n.

Na przykład, aby sprawdzić, że liczba 97 jest pierwsza, wystarczy upewnić się, że nie dzieli się przez liczby pierwsze mniejsze od $\sqrt{97}$, czyli liczby pierwsze mniejsze od 10. Korzystając ze znanych kryteriów podzielności łatwo wykluczyć podzielność liczby 97 przez 2, 3 i 5, pozostaje więc tylko sprawdzić podzielność przez 7, która w przypadku liczby 97 także nie zachodzi.

Zadanie 1.
Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite, które mają dokładnie trzy dodatnie dzielniki.

Rozwiązanie
Z twierdzenia 1 wiemy, że każda liczba dodatnia n o nieparzystej liczbie dodatnich dzielników jest kwadratem liczby całkowitej. Zatem jeśli n ma dokładnie trzy dzielniki, to $n=k^2$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Jeżeli liczba k jest pierwsza, to n ma dokładnie trzy dzielniki: 1, k, n. W przeciwnym przypadku dowolny dzielnik pierwszy liczby k jest kolejnym dzielnikiem liczby n.

Wobec tego dokładnie trzy dodatnie dzielniki mają te i tylko te dodatnie liczby całkowite, które są kwadratami liczb pierwszych.

Zadanie 2. (Koło Matematyczne SEM, seria 10)

Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Tysiąc żarówek, ponumerowanych liczbami od 1 do 1000, było włączanych i wyłączanych specjalnym przełącznikiem. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapaliło wszystkie żarówki, drugie naciśnięcie zgasiło wszystkie żarówki o numerach parzystych, trzecie zmieniło stan żarówek o numerach podzielnych przez 3 itd. Ogólniej, kolejne, k-te naciśnięcie przełącznika zmieniło stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Które żarówki świeciły pod koniec, jeśli w trakcie dyskoteki Kazio nacisnął przełącznik 1000 razy?

Rozwiązanie

Stan n-tej żarówki zmienił się tyle razy w czasie dyskoteki, ile dodatnich dzielników ma liczba n. Początkowo wszystkie żarówki były wyłączone. Wobec tego po zakończeniu dyskoteki świeciły te i tylko te spośród nich, których numery mają nieparzystą liczbę dodatnich dzielników. Z twierdzenia 1 wynika, że były to żarówki o numerach będących kwadratami liczb całkowitych, czyli żarówki 1, 4, 9, 16, …, $31^2 = 961$.

Zadanie 3. (LXIV OM, zawody I stopnia)

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykaż, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez k wykładnik przy 2 w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n. Wówczas

$$n = 2^k \cdot l,$$

gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, l zaś — dodatnią liczbą nieparzystą.

Suma parzystych dzielników liczby n jest parzysta, jeśli więc suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n jest nieparzysta, to nieparzystych jest nieparzyście wiele.

Liczba l, jako nieparzysta, ma wyłącznie nieparzyste dzielniki oraz każdy z nich jest też dzielnikiem liczby n. Również na odwrót, każdy nieparzysty dzielnik liczby n musi być także dzielnikiem liczby l. Wobec tego nieparzyste dzielniki liczby n to wszystkie dzielniki liczby l. Skoro jest ich nieparzyście wiele, to na mocy twierdzenia 1 wnioskujemy, iż liczba l jest kwadratem pewnej liczby całkowitej m.

Oznacza to, że

$$n = 2^k \cdot l = 2^k \cdot m^2.$$

Jeśli liczba k jest parzysta, to liczba $\frac{k}{2}$ jest całkowita nieujemna i wówczas n jest kwadratem:

$$n = \left(2^{\frac{k}{2}} \cdot m\right)^2.$$

Jeśli zaś liczba k jest nieparzysta, to liczba $\frac{k-1}{2}$ jest całkowita nieujemna i wtedy n jest podwojonym kwadratem:

$$n = 2 \cdot \left(2^{\frac{k-1}{2}} \cdot m\right)^2.$$

To kończy dowód.

W dalszej części tego artykułu przyda się dokładniejszy niż dotychczas zapis rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Każdą liczbę całkowitą n większą od 1 można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{\alpha_j}, \qquad (*)$$

gdzie czynniki $p_1, p_2, \ldots, p_j$ to uporządkowane rosnąco różne liczby pierwsze, natomiast $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ to ich całkowite dodatnie wykładniki.

Przykładowo, dla liczby 3500 zapisanej w postaci

$$3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

mamy $j=3$, $p_1=2$, $p_2=5$, $p_3=7$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=1$.

Twierdzenie 2.

Liczba całkowita większa od 1 *jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki są parzyste.*

Zanim udowodnimy to twierdzenie, zobaczmy kilka jego zastosowań. Zacznijmy od dowodu pewnego dobrze znanego faktu.

Fakt

Liczba $\sqrt{2}$ *jest niewymierna.*

Dowód

Załóżmy, że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna, czyli że istnieją takie dodatnie liczby całkowite p, q, dla których $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Wówczas $\sqrt{2} \cdot q = p$, więc

$$2q^2 = p^2.$$

Z twierdzenia 2 liczba p^2, jako kwadrat liczby całkowitej, ma w rozkładzie na czynniki pierwsze parzysty wykładnik przy czynniku 2 (jeśli $p=1$, to zapiszmy $p^2 = 1 = 2^0$).

Analogicznie liczba q^2 ma parzysty wykładnik przy czynniku 2, co oznacza, że liczba $2q^2$ ma przy 2 wykładnik nieparzysty. Równość $2q^2 = p^2$ jest więc niemożliwa. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 4.

Czy istnieje liczba o sumie cyfr równej 123, która jest kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Liczba o sumie cyfr równej 123 dzieli się przez 3, ale nie dzieli się przez 9, czyli w jej rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 3 występuje z wykładnikiem 1. Stąd, na mocy twierdzenia 2, rozważana liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5.

Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że każda z liczb ab, bc, ca kończy się cyframi 20?

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli liczba kończy się cyframi 20, to dzieli się przez 5, ale nie przez 25 (bo liczby podzielne przez 25 mają dwie ostatnie cyfry 00, 25, 50 lub 75).

Przypuśćmy, że istnieją opisane w zadaniu liczby a, b, c. Każda z liczb ab, bc, ca jest wówczas podzielna przez 5, ale nie przez 25. Stąd iloczyn $ab \cdot bc \cdot ca = (abc)^2$ ma w rozkładzie na czynniki pierwsze liczbę 5 w potędze 3, czyli nieparzystej. Jest to sprzeczne z twierdzeniem 2, zatem nie istnieją takie liczby a, b, c.

Zadanie 6.

Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, która pomnożona przez liczbę o 2 od niej większą kończy się cyframi 05?

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje taka liczba n. Wtedy liczba o jeden większa od opisanego w zadaniu iloczynu, czyli liczba $n(n+2)+1=(n+1)^2$, kończy się cyframi 06. Jest więc podzielna przez 2, ale nie przez 4. Jednak na mocy twierdzenia 2 taka liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej. Otrzymana sprzeczność oznacza, że nie istnieje liczba n o żądanych własnościach.

Zadanie 7.

Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n, dla której liczba

$$n+2n+3n+\ldots+100n$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Przekształćmy rozważane wyrażenie następująco:

$$n+2n+3n+\ldots+100n=n\cdot(1+2+3+\ldots+100)=$$
$$=n\cdot\big((1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51)\big)=$$
$$=n\cdot 50\cdot 101=n\cdot 2\cdot 5^2\cdot 101.$$

Na mocy twierdzenia 2, aby liczba ta była kwadratem, każdy dzielnik pierwszy musi występować w parzystej potędze. Oznacza to, że liczba n musi być postaci $2\cdot 101\cdot k^2$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Najmniejszą możliwą wartością n jest więc $2\cdot 101\cdot 1^2=202$.

Zadanie 8. (Koło Matematyczne SEM, seria 4)

Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $2n$ jest kwadratem liczby całkowitej, a $1024n$ jest czwartą potęgą liczby całkowitej?

Rozwiązanie

Załóżmy, że taka liczba n istnieje i zapiszmy ją w postaci $n=2^k\cdot l$, jak w rozwiązaniu zadania 3.

Skoro liczba $2n=2^{k+1}\cdot l$ jest kwadratem liczby całkowitej, to na mocy twierdzenia 2 wykładnik $k+1$ jest parzysty, więc k jest liczbą nieparzystą.

Skoro liczba $1024n=2^{10}\cdot n=2^{k+10}\cdot l$ jest czwartą potęgą liczby całkowitej, to jest także kwadratem liczby całkowitej. Zatem wykładnik $k+10$ jest parzysty, więc liczba k jest parzysta, sprzecznie z wcześniejszą obserwacją.

Założenie, że istnieje liczba n opisana w zadaniu, prowadzi do sprzeczności, więc taka liczba istnieć nie może, co kończy rozwiązanie.

Dowód twierdzenia 2.

Korzystając ze wzoru $(*)$, zauważmy, że kwadrat dowolnej liczby całkowitej n większej od 1 jest postaci

$$n^2=\left(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_j^{\alpha_j}\right)^2=p_1^{2\alpha_1}\cdot p_2^{2\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_j^{2\alpha_j},$$

więc faktycznie w rozkładzie na czynniki pierwsze ma wszystkie wykładniki parzyste.

W drugą stronę, zauważmy, iż jeśli dodatnia liczba całkowita n postaci $(*)$ ma w rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j$ parzyste, to liczba ta jest kwadratem liczby całkowitej

$$p_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\cdot p_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\cdot\ldots\cdot p_j^{\frac{\alpha_j}{2}},$$

gdyż podnoszenie liczby do kwadratu podwaja wszystkie wykładniki w jej rozkładzie. To kończy dowód.

Analogicznie można udowodnić następujące ogólniejsze twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Liczba całkowita większa od 1 jest k-tą potęgą liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki są wielokrotnościami k.

Na zakończenie proponujemy kilka zadań, wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu.*

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite, które mają dokładnie pięć dodatnich dzielników.

Zadanie 10.

Jaś wybrał pewną dodatnią liczbę całkowitą i powiedział Małgosi, ile ta liczba ma dzielników. Czy tylko na podstawie tej informacji Małgosia zawsze może rozstrzygnąć, czy wybrana przez Jasia liczba jest sześcianem pewnej liczby całkowitej?

Zadanie 11.

Czy istnieje liczba postaci $50505\ldots505$, która jest kwadratem liczby całkowitej?

Zadanie 12.

Czy istnieje liczba postaci $444\ldots4$, która jest sześcianem liczby całkowitej?

Zadanie 13.

Udowodnij, że liczba $\sqrt[n]{2}$ jest niewymierna dla każdej liczby całkowitej n większej od 1.

Joanna Jaszuńska

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Rady na układy

6a. Dodaj równania stronami, a następnie przenieś wszystkie wyrażenia na jedną stronę równości i skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia.

6b. Pomnóż drugie równanie układu przez 2, a następnie dodaj równania stronami albo zastosuj metodę podstawiania, wyznaczając z drugiego równania y^2.

7. Pomnóż równania stronami oraz skorzystaj z wybranych równań danego układu.

8a. Uzasadnij, że liczby a, b, c muszą być nieujemne. Odejmując stronami równanie drugie od pierwszego, dostajemy $a=c$ lub $a+2b+c+4=0$. Dla liczb nieujemnych druga równość nie może być spełniona. Analogicznie otrzymujemy $b=a$, skąd $a=b=c$.

8b. Dodaj stronami dane równania i skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia.

Pole

5. Oznacz punkt przecięcia prostej k z prostą BC przez X. Zauważ, że trójkąty ADL i EXK mają równe pola.

6. Zauważ, że $[QAKX]=[QAX]+[AKX]=\frac{1}{2}[AFX]+\frac{1}{2}[ABX]$.

7. Narysuj przekątną AC danego równoległoboku i poszukaj trójkątów o równych polach.

8. Wykaż, że prosta przechodząca przez środek okręgu wpisanego dzieli obwód i pole trójkąta w takim samym stosunku.

9. Zauważ, że jeśli $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}$, to również $\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}$. Wywnioskuj stąd, że pola trójkątów ABD i BEC są równe.

10. Oznacz przez S punkt symetryczny do A względem punktu M. Uzasadnij, że suma pól trójkątów BCM i SCM jest równa polu trójkąta BMS. Wywnioskuj stąd, że punkt C leży na odcinku BS.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 5000 egz.