Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 13
wrzesień 2014
ISSN 2300-0708

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Kącik poetycki

Jeden z uczestników IX edycji OMG (2013/14) postanowił zaskarbić sobie względy Komisji Odwoławczej poprzez prezentację swoich talentów humanistycznych i sformułowanie odwołania w postaci krótkiego wierszyka:

Drodzy panowie, Drogie panie,
Chciałbym złożyć odwołanie
Bo zadanie numer dwa
Rozwiązać jestem w stanie!

Poetycka rękawica została podniesiona i w odpowiedzi na takie *dictum* Komisja Odwoławcza wysłała następujące uzasadnienie przyznanej oceny:

Chociaż zgodny z założeniem
Punkt O ładnie Pan wyznacza,
Dowód jego jedyności
Trochę Pana już przytłacza.

Pragnąc nie wprost rozumować
Inny punkt Z Pan obiera
I na punktach O, Z i X
Okrąg Pan rysuje teraz.

„AC częścią jest średnicy”
Twierdzi Pan, że się okaże,
Lecz uzasadnienie tego
Pozostaje w strefie marzeń.

Zaś w kryteriach oceniania
Nie ma żadnych wątpliwości:
Na sześć punktów był potrzebny
Dowód tej jednoznaczności.

Więc komisja odwoławcza
Dłużej się nie zastanawia
I z oceną pięciu punktów
Nadal Pana pozostawia.

My natomiast pozostawiamy Czytelnikowi ocenę, kto zwyciężył w powyższym pojedynku na rymy. ;) Życzymy ponadto miłej lektury niniejszego wydania *Kwadratu* oraz powodzenia w nowym roku szkolnym!

Redakcja

Kolorowe szachownice

W kombinatoryce istnieje wiele problemów, do rozwiązania których wykorzystuje się *kolorowanie*, czyli wyróżnienie niektórych fragmentów płaszczyzny celem zilustrowania pewnych własności. Poniżej przedstawimy kilka zadań, które przybliżą ten temat. Skupimy się na kolorowaniach złożonych z dwóch kolorów: białego i *kolorowego*.

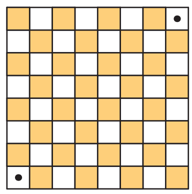
W niektórych zadaniach użyteczne okazuje się nawet tak proste i intuicyjne kolorowanie, jak zwykła szachownica.

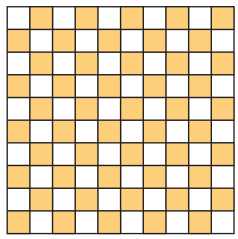
Zadanie 1.

Czy szachownicę 8×8 można „obskoczyć” ruchami konika szachowego, stając na każdym polu dokładnie raz, jeśli startujemy z lewego dolnego pola i kończymy w prawym górnym?

Rozwiązanie

Zauważmy, że wykonanie ruchu konikiem szachowym powoduje zmianę koloru pola, na którym on stoi. To oznacza, że jeśli startujemy z pola białego (rys. 1), to po pierwszym ruchu konik znajdzie się na polu kolorowym, po drugim ruchu — na polu białym, po trzecim — znów na kolorowym itd. Aby „obskoczyć” całą szachownicę i na każdym polu być dokładnie raz, potrzebne są 63 ruchy. Jednak po wykonaniu 63 ruchów konik znajdzie się na polu kolorowym, a prawe górne pole szachownicy jest białe. To oznacza, że odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest negatywna.

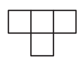

rys. 1


rys. 2

Często w zadaniach dotyczących szachownic mamy do czynienia z pokrywaniem ich różnymi figurami (na przykład tetraminami czy prostokątami) w taki sposób, aby cała powierzchnia została pokryta, a figury ani nie nachodziły na siebie ani nie wystawały poza szachownicę. Przyjrzyjmy się poniższemu problemowi.

Zadanie 2.

Czy kwadrat 10×10 można pokryć tetraminami w kształcie litery T (zob. rysunek poniżej), składającymi się z czterech pól 1×1?



Rozwiązanie

Przypuśćmy, że opisane pokrycie jest możliwe. Pokolorujmy dany kwadrat 10×10 w szachownicę, jak pokazano na rysunku 2. Zauważmy, że do pokrycia kwadratu potrzebnych jest $\frac{100}{4}=25$ klocków tetramina, czyli ich nieparzysta liczba. Ponadto każde tetramino zajmuje 1 lub 3, czyli nieparzystą liczbę kolorowych pól. Stąd liczba kolorowych pól zajętych przez wszystkie tetramina jest nieparzysta, podczas gdy liczba kolorowych pól kwadratu jest parzysta. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje szukane pokrycie.

Zadanie 3.

Czy kwadrat 10×10 można pokryć klockami o wymiarach 1×4?

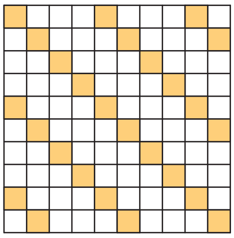
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie

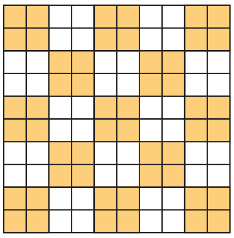
Sposób I

Pokolorujmy kwadrat jak na rysunku 3.

Każdy klocek 1×4 zajmuje dokładnie jedno kolorowe pole. Takich pól jest 26. Aby więc pokryć szachownicę, należy użyć 26 klocków. Jednak do jej pokrycia potrzebnych jest dokładnie $\frac{100}{4}=25$ klocków. Odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest więc negatywna.



rys. 3



rys. 4

Sposób II

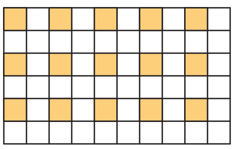
Rozważmy kolorowanie pokazane na rysunku 4. Każdy klocek pokrywa dwa kolorowe pola i dwa białe pola, więc wszystkie klocki powinny pokrywać łącznie tę samą liczbę białych i kolorowych pól. Tymczasem kwadrat zawiera 52 pola kolorowe oraz 48 pól białych. Dochodzimy więc znów do wniosku, że nie istnieje żądane pokrycie.

Zadanie 4.

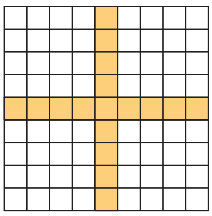
Pewien prostokąt pokryto klockami, z których każdy jest wymiaru 2×2 lub 1×4. Następnie zebrano wszystkie klocki i wymieniono jeden klocek 2×2 na klocek 1×4. Wykaż, że nie da się pokryć wyjściowego prostokąta tak otrzymanym nowym zestawem klocków.

Rozwiązanie

Pokolorujmy prostokąt tak, jak pokazano na rysunku 5. Każdy klocek 2×2 pokrywa wówczas dokładnie jedno, czyli nieparzystą liczbę kolorowych pól, a prostokąt 1×4 pokrywa 0 lub 2, czyli parzystą liczbę kolorowych pól. Z tego wynika, że po wykonaniu opisanej zamiany parzystość liczby kolorowych pól pokrytych przez klocki zmieni się, czyli pokrycie wyjściowego prostokąta przestanie być możliwe.



rys. 5



rys. 6

Zadanie 5.

Udowodnij, że kwadratu 9×9 nie można pokryć klockami, z których każdy jest wymiaru 1×5 lub 1×6.

Rozwiązanie

Przypuśćmy nie wprost, że opisane pokrycie jest możliwe. Pokolorujmy kwadrat tak, jak pokazano na rysunku 6. Każdy klocek pokryje co najmniej jedno kolorowe pole, a klocek zajmujący pole centralne pokryje co najmniej pięć kolorowych pól. Kolorowych pól jest 17, więc do pokrycia kwadratu możemy użyć co najwyżej $17-5+1=13$ klocków. W takim razie klocki pokryją co najwyżej $13\cdot 6=78$ pól, a kwadrat 9×9 ma 81 pól. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 6.

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n o następującej własności: w kwadracie $n\times n$ można umieścić nie nachodzące na siebie klocki 1×4 w taki sposób, aby zajęte były wszystkie pola nie leżące przy brzegu (należy wypełnić szczelnie kwadrat $(n-2)\times(n-2)$, a klocki mogą wystawać jedno pole poza ten kwadrat).

Rozwiązanie

Rozważmy przypadki:

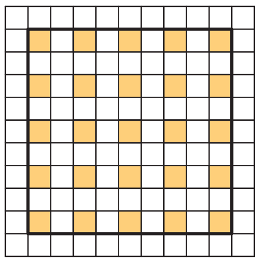
(1) Liczba n jest podzielna przez 4. W tym przypadku pokrycie jest możliwe, wypełniamy cały kwadrat $n\times n$.

(2) Liczba n daje resztę 1 z dzielenia przez 4. W tym przypadku możemy pokryć klockami narożny kwadrat o boku $n-1$, wówczas w szczególności cały centralny kwadrat $(n-2)\times(n-2)$ zostanie pokryty.

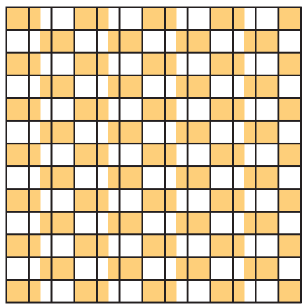
(3) Liczba n daje resztę 2 z dzielenia przez 4. Wypełniamy klockami kwadrat $(n-2)\times(n-2)$ położony centralnie w kwadracie $n\times n$.

(4) Liczba n daje resztę 3 z dzielenia przez 4. Kolorujemy kwadrat tak, jak pokazano na rysunku 7. Każdy klocek pokrywa wówczas parzystą liczbę kolorowych pól (0 lub 2). Z drugiej strony liczba kolorowych pól wynosi $\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$, co jest iloczynem dwóch liczb nieparzystych, czyli liczbą nieparzystą. Oznacza to, że w tym przypadku nie istnieje żądane wypełnienie kwadratu.

Odpowiedź. Warunki zadania spełniają te liczby naturalne $n\geqslant 4$, które nie dają reszty 3 przy dzieleniu przez 4.



rys. 7



rys. 8

Do rozwiązania kolejnego zadania zastosujemy nieintuicyjne kolorowanie, w którym pewne kwadraty jednostkowe będą kolorowe tylko w połowie.

Zadanie 7.

Czy kwadrat 13×13 można pokryć klockami, z których każdy ma wymiary 2×2 lub 3×3?

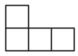
Rozwiązanie

Pokolorujmy kwadrat tak, jak pokazano na rysunku 8 (wyróżnione prostokąty mają wymiary $1\times\frac{3}{2}$). Wówczas każdy z klocków 2×2 i 3×3 pokrywa taką samą powierzchnię białą, co kolorową. Zatem, aby rozważane pokrycie istniało, powierzchnia kolorowa powinna być równa powierzchni białej. Możemy jednak łatwo policzyć, że powierzchnia biała zajmuje łącznie 84 pojedyncze pola, a powierzchnia kolorowa — 85 pól.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w kolejnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 8.

Czy szachownicę 8×8 można pokryć piętnastoma tetraminami w kształcie litery L (zob. rysunek poniżej), składającymi się z czterech kwadratów 1×1, oraz jednym kwadratem 2×2?



Zadanie 9.

Kwadrat o wymiarach 7×7 jest pokryty szesnastoma klockami o wymiarach 3×1 i jednym o wymiarach 1×1. Jakie są możliwe położenia klocka 1×1 w tym kwadracie?

Zadanie 10.

Wszystkie pola pokratkowanej płaszczyzny są pokolorowane na biało. Przeprowadzamy wielokrotnie następującą operację: wybieramy dowolny kwadrat 3×3 lub 4×4, po czym każde jego czarne pole przekolorowujemy na białe, a białe na czarne. Czy za pomocą skończonej liczby takich operacji można otrzymać płaszczyznę, w której pola pewnego kwadratu 2×2 są czarne, a pozostałe pola są białe?

Anna Hoduń

Nierówność między średnimi

Danych jest n liczb dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Wówczas *średnią arytmetyczną* tych liczb nazywamy liczbę A zdefiniowaną wzorem

$$A=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

natomiast *średnią geometryczną* tych liczb nazywamy liczbę G zdefiniowaną wzorem

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

W rozwiązaniach wielu zadań można skorzystać z następującej ważnej własności: *dla dowolnych liczb dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_n$ zachodzi nierówność $G\leqslant A$, przy czym równość $G=A$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=\ldots=a_n$.*

Nie będę w tym artykule dowodził tej nierówności, pokażę tylko kilka jej zastosowań. Zacznę od rozwiązania zadania, które znalazło się na zawodach pierwszego stopnia I Olimpiady Matematycznej (r. szk. 1949/50). Nierówność będąca tematem tego zadania została wybita w 1999 r. na medalu pamiątkowym z okazji 50-lecia Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 1. (I OM, zawody I stopnia)

Udowodnij, że jeśli $m>0$, to $m+\dfrac{4}{m^2}\geqslant 3$.

Rozwiązanie

Rozważmy następujące trzy liczby dodatnie:

$$a_1=\frac{m}{2},\quad a_2=\frac{m}{2},\quad a_3=\frac{4}{m^2}.$$

Wówczas

$$G=\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3}=\sqrt[3]{\frac{m}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{4}{m^2}}=1,$$

natomiast

$$A=\frac{1}{3}\left(\frac{m}{2}+\frac{m}{2}+\frac{4}{m^2}\right)=\frac{1}{3}\left(m+\frac{4}{m^2}\right).$$

Podstawiając do nierówności $G\leqslant A$ uzyskane wielkości, otrzymujemy natychmiast tezę.

Możemy jeszcze dodatkowo zauważyć, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=a_3$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $m/2=4/m^2$. Wyznaczając m z ostatniego równania, dostajemy $m=2$.

Zadanie 2.

Udowodnij, że jeśli $m>0$, to

$$m^2+\frac{2}{m}\geqslant 3$$

oraz wyznacz wszystkie dodatnie liczby m, dla których zachodzi równość.

Rozwiązanie

Tym razem weźmy pod uwagę następujące trzy liczby dodatnie:

$$a_1=m^2,\quad a_2=\frac{1}{m},\quad a_3=\frac{1}{m}.$$

Wówczas

$$G=\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3}=\sqrt[3]{m^2\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}}=1,$$

natomiast

$$A=\frac{1}{3}\left(m^2+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{3}\left(m^2+\frac{2}{m}\right).$$

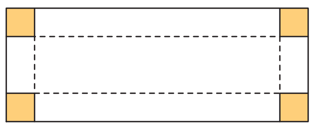
Podstawiając uzyskane wielkości do nierówności $G\leqslant A$, uzyskujemy tezę.

Równość w dowodzonej nierówności jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=a_3$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2=1/m$. Ostatnia zależność jest spełniona jedynie dla $m=1$.

Teraz pokażę, w jaki sposób można wykorzystać nierówność między średnimi do rozwiązywania tzw. zadań optymalizacyjnych. Wiąże się z tym jednak pewna trudność. Zobaczymy ją na przykładzie następującego zadania.

Zadanie 3.

Dana jest prostokątna kartka papieru o długości 24 i szerokości 9. Z tej kartki wycinamy cztery kwadraty na rogach, zaginamy wzdłuż linii przerywanych (rys. 9) i tworzymy pudełko. Znaleźć długość boku odcinanych kwadratów, dla której objętość otrzymanego pudełka jest możliwie największa.



rys. 9

Rozwiązanie

Niech x oznacza długość boku odcinanych kwadratów. Wówczas objętość pudełka wyraża się wzorem

$$V=(24-2x)\cdot(9-2x)\cdot x.$$

Rozpatrzmy następujące trzy liczby dodatnie:

$$a_1=24-2x,\quad a_2=9-2x\quad\text{oraz}\quad a_3=4x.$$

Mamy wówczas

$$G=\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3}=\sqrt[3]{4V}\quad\text{oraz}\quad A=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=11.$$

Skoro $G\leqslant A$, więc $\sqrt[3]{4V}\leqslant 11$. Zatem $4V\leqslant 11^3=1331$, czyli $V\leqslant 332{,}75$.

Czy jednak stąd wynika, że największa możliwa objętość pudełka jest równa 332,75? Aby to sprawdzić, spróbujmy obliczyć długość x, dla której $V=332{,}75$. Wtedy mamy także $G=A$. Wiemy, że ta równość jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=a_3$. Zatem uzyskujemy stąd $24-2x=9-2x=4x$. Jednak pierwsza z tych równości nie może zachodzić dla żadnego x. Wobec tego spełniona jest nierówność ostra: $G<A$, a więc w konsekwencji $V<332{,}75$.

Otrzymaliśmy zatem tylko oszacowanie górne: objętość każdego pudełka, w tym także tego o maksymalnej objętości, jest *mniejsza* od 332,75. Nadal jednak nie wiemy, ile dokładnie ta maksymalna objętość wynosi.

Rozpatrzmy z kolei inne liczby dodatnie:

$$a_1=24-2x,\quad a_2=36-8x\quad\text{oraz}\quad a_3=10x.$$

Stąd dostajemy

$$G=\sqrt[3]{(24-2x)\cdot(36-8x)\cdot 10x}=$$
$$=\sqrt[3]{40\cdot(24-2x)(9-2x)x}=\sqrt[3]{40V}$$

oraz

$$A=\frac{24-2x+36-8x+10x}{3}=\frac{60}{3}=20.$$

Nierówność między średnimi $G\leqslant A$ daje nam teraz

$$\sqrt[3]{40V}=G\leqslant A=20,$$

czyli $40V\leqslant 20^3=8000$. Ostatecznie $V\leqslant 200$. Otrzymaliśmy zatem lepsze szacowanie: widzimy, że objętość pudełka jest mniejsza lub równa 200. Czy jednak tym razem jest to objętość maksymalna?

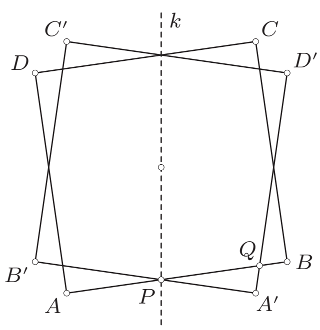
Sprawdźmy, podobnie jak wyżej, czy istnieje taka wielkość x, dla której $V=200$. Równość ta jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $G=A$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=a_3$. Z równości $a_1=a_2$, czyli $24-2x=36-8x$, uzyskujemy wówczas $x=2$. Wtedy

$$a_1=24-2\cdot 2=20,\quad a_2=36-8\cdot 2=20,\quad a_3=10\cdot 2=20.$$

Okazało się więc, że jeśli $x=2$, to $a_1=a_2=a_3=20$ i dla tych liczb otrzymujemy $G=A$, a więc $V=200$. Podsumowując: dla każdego x, objętość powstałego pudełka nie przekracza 200, a dla $x=2$ objętość ta równa się 200. Wobec tego szukaną maksymalną objętością jest $V=200$.

Zadanie 4.

Dany jest kwadrat $ABCD$ i prosta k przechodząca przez jego środek. Załóżmy, że prosta k przecina bok AB kwadratu w takim punkcie P, że $AP<BP$. Odbijamy kwadrat $ABCD$ symetrycznie względem prostej k. Wyznacz długość odcinka AP, dla której figura złożona z kwadratu $ABCD$ i jego odbicia symetrycznego ma największe pole.



rys. 10

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że interesująca nas figura składa się z kwadratu $ABCD$ i czterech trójkątów przystających do trójkąta $PA'Q$ (rys. 10). Zauważmy następnie, że $AP=A'P$ oraz $BQ=A'Q$. Niech $AB=1$, $AP=p$ oraz $BQ=q$. Mamy wówczas

$$p+\sqrt{p^2+q^2}+q=1,$$

skąd po nietrudnych obliczeniach dostajemy

$$q=\frac{1-2p}{2-2p}.$$

Zatem pole naszej figury jest równe

$$1+4\cdot\frac{pq}{2}=1+\frac{p(1-2p)}{1-p}=\frac{1-2p^2}{1-p}.$$

Niech teraz $r=1-p$. Wówczas $p=1-r$ i rozważane pole jest równe

$$\frac{1-2(1-r)^2}{r}=\frac{1-2+4r-2r^2}{r}=4-\left(2r+\frac{1}{r}\right).$$

Pole naszej figury jest więc największe dla takiego r, dla którego $2r+\frac{1}{r}$ jest najmniejsze. Ale wiemy, że

$$\frac{1}{2}\left(2r+\frac{1}{r}\right)\geqslant\sqrt{2r\cdot\frac{1}{r}},\quad\text{czyli}\quad 2r+\frac{1}{r}\geqslant 2\sqrt{2},$$

przy czy równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $2r=1/r$, czyli wtedy, gdy $r=1/\sqrt{2}$.

Mamy zatem odpowiedź: największe pole uzyskujemy dla odcinka AP o długości $1-1/\sqrt{2}\approx 0{,}2929$ i jest ono równe $4-2\sqrt{2}\approx 1{,}1716$.

Na koniec proponuję następujące zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5.

Wykaż, że jeśli liczby a, b oraz m są dodatnie, to

$$\text{(a)}\quad am+\frac{b}{m^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{4}},\qquad\text{(b)}\quad am^2+\frac{b}{m}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}.$$

Mając dane liczby a, b, wyznacz wszystkie liczby m, dla których spełniona jest równość.

Zadanie 6. (XLI OM, zawody I stopnia)

Wyznacz największą wartość iloczynu

$$a_1\cdot a_2^2\cdot a_3^3\cdot\ldots\cdot a_n^n,$$

gdzie $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są dodatnimi liczbami o sumie 1.

Wojciech Guzicki

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Kwadraty i dzielniki raz jeszcze

18. Wykorzystaj twierdzenie 4 i postępuj podobnie jak w zadaniu 14. *Odpowiedź:* $2^{10}\cdot 3$.

19. Wykorzystaj twierdzenie 4, aby ustalić możliwe postaci $(*)$ szukanych liczb. Następnie weź pod uwagę, że $100=2^2\cdot 5^2$. *Odpowiedź:* 400 oraz 2500.

20. Nie. Wykorzystaj twierdzenia 3 i 4, by sprawdzić, że sześciany liczb całkowitych mają liczbę dzielników niepodzielną przez 3.

21. Wywnioskuj z twierdzenia 5, jakiej postaci musi być liczba, aby suma wszystkich jej dodatnich dzielników była liczbą pierwszą. *Odpowiedź:* 2^4 oraz 5^2.

22. Zauważ, że liczby względnie pierwsze nie mają wspólnych dzielników pierwszych. Następnie wykorzystaj postać $(*)$ liczb n i k oraz twierdzenie 5.

23. Sprawdź, że zachodzi równość

$$(p_i-1)(1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i})=p_i^{\alpha_i+1}-1$$

i wykorzystaj twierdzenie 5.

Kwadrat redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 5000 egz.