Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

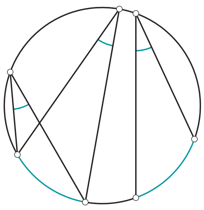
Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nr 14
grudzień 2014

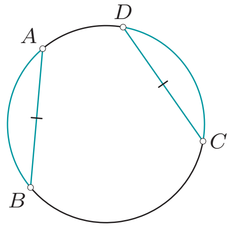
ISSN 2300-0708

O łukach równej długości

Znane twierdzenie mówi, że w każdym okręgu kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary. Wiemy także, że równe miary mają kąty wpisane oparte na dwóch łukach równej długości. Również odwrotnie: jeżeli kąty wpisane oparte na pewnych dwóch łukach mają równe miary, to łuki te są równej długości (rys. 1).



rys. 1

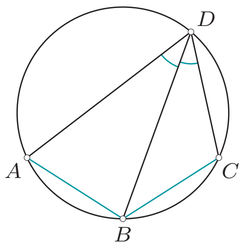


rys. 2

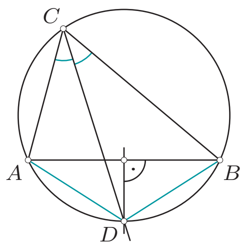
Ponadto, jeżeli łuki AB i CD tego samego okręgu są równej długości, to cięciwy AB i CD są także równej długości. Również odwrotnie: jeżeli cięciwy AB i CD jednego okręgu są równej długości, to krótszy łuk AB tego okręgu jest równy krótszemu łukowi CD (rys. 2). Wynika stąd natychmiast następujące użyteczne twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg (rys. 3). Wówczas półprosta DB jest dwusieczną kąta ADC wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BC$.



rys. 3



rys. 4

Pomimo swojego prostego sformułowania, powyższe twierdzenie ma wiele zastosowań w zadaniach olimpijskich. Spójrzmy na dwa przykłady.

Zadanie 1.

Dany jest trójkąt ABC. Wykaż, że symetralna boku AB i dwusieczna kąta ACB przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez D środek tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, który nie zawiera punktu C (rys. 4). Ponieważ łuki AD i DB są równej długości, więc $AD = DB$, czyli punkt D leży na symetralnej boku AB. Z twierdzenia 1 dla czworokąta $ADBC$ dostajemy z kolei, że półprosta CD jest dwusieczną kąta ACB. Zatem punkt D jest punktem przecięcia symetralnej boku AB i dwusiecznej kąta ACB, a przy tym leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Zadanie 2.

W trójkącie ABC zachodzi równość $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Dwusieczne kątów BAC i ABC tego trójkąta przecinają boki BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Oznaczmy przez I punkt przecięcia tych dwusiecznych. Wykaż, że $ID = IE$ (rys. 5).

Rozwiązanie

Kąty EID oraz AIB są wierzchołkowe, zatem

$$\sphericalangle EID = \sphericalangle AIB = 180^\circ - \sphericalangle IAB - \sphericalangle IBA.$$

Ponieważ półproste AI i BI są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC, więc

$$\sphericalangle EID = 180^\circ - \frac{\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA}{2}.$$

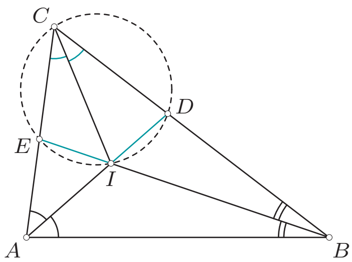
Skoro $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, a suma miar kątów w trójkącie wynosi 180°, to $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA = 120^\circ$. Wobec tego

$$\sphericalangle EID = 180^\circ - \frac{120^\circ}{2} = 120^\circ.$$

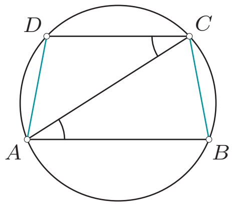
W czworokącie $EIDC$ mamy zatem

$$\sphericalangle EID + \sphericalangle ECD = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

więc czworokąt ten można wpisać w okrąg. Ponieważ prosta CI jest dwusieczną kąta ECD (w trójkącie dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie), to z twierdzenia 1 zastosowanego dla czworokąta $EIDC$ uzyskujemy $ID = IE$. To kończy rozwiązanie zadania.



rys. 5



rys. 6

Cięciwy równej długości pojawiają się także wtedy, gdy wpisujemy w okrąg trapez.

Twierdzenie 2.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg (rys. 6). Wówczas proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $BC = DA$.

Dowód

Proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$. Równość ta z kolei jest równoważna zależności $BC = DA$, co kończy dowód twierdzenia.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3.

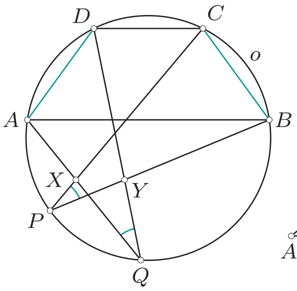
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, wpisany w okrąg o. Na okręgu tym wybrano punkty P, Q różne od A, B w taki sposób, że punkty A, P, Q, B, C, D leżą na okręgu o w tej właśnie kolejności (rys. 7). Odcinki PC i QA przecinają się w punkcie X, a odcinki PB i QD przecinają się w punkcie Y. Wykaż, że punkty P, Q, X, Y leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

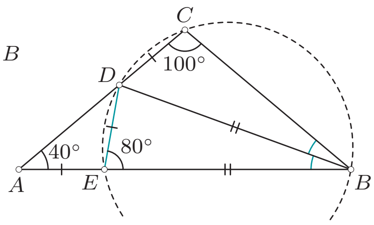
Ponieważ proste AB i CD są równoległe, więc z twierdzenia 2 wnioskujemy, że $BC = DA$. Wynika stąd, że łuki DA i BC mają równe długości, a w związku z tym kąty BPC i DQA wpisane w okrąg o mają równe miary:

$$\sphericalangle YPX = \sphericalangle BPC = \sphericalangle DQA = \sphericalangle YQX\,.$$

Ponieważ punkty P i Q leżą po tej samej stronie prostej XY, więc ostatnia równość oznacza, że punkty P, Q, X, Y leżą na jednym okręgu. To kończy rozwiązanie zadania.



rys. 7



rys. 8

Zadanie 4.

W trójkącie ABC kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A i B mają miary 40°. Dwusieczna kąta ABC przecina odcinek AC w punkcie D (rys. 8). Udowodnij, że $BD + CD = AB$.

Rozwiązanie

Na boku AB obieramy taki punkt E, że spełniona jest równość $\sphericalangle BED = 80^\circ$. Wówczas

$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle BED = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ\,.$$

Wobec tego czworokąt $BCDE$ można wpisać w okrąg. Ponieważ półprosta BD jest dwusieczną kąta EBC, więc korzystając z twierdzenia 1, uzyskujemy $CD = DE$. Ponadto

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEB - \sphericalangle DAB = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ = \sphericalangle DAE\,,$$

skąd wynika, że $DE = AE$. Podobnie,

$$\sphericalangle EDB = 180^\circ - \sphericalangle DEB - \sphericalangle EBD = \\ = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ = \sphericalangle DEB\,,$$

skąd wniosek, że $BD = BE$. Otrzymujemy więc

$$BD + CD = BE + AE = AB\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Przedstawiamy także kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich zamieścimy w kolejnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5.

W czworokącie $ABCD$ spełnione są następujące równości: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 60^\circ$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD. Udowodnij, że $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$.

Zadanie 6.

Punkty D i E leżą na boku AC trójkąta ABC. Półproste BD i BE dzielą kąt ABC na trzy równe kąty. Okrąg przechodzący przez punkt B przecina półproste BA, BC, BD, BE odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wykaż, że punkty K, L, M, N są wierzchołkami trapezu.

Zadanie 7.

W trójkącie ABC okrąg wpisany o środku I jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach A_1, B_1, C_1. Odcinki AI, BI, CI przecinają ten okrąg odpowiednio w punktach A_2, B_2, C_2. Udowodnij, że proste A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 8.

W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg spełniona jest równość $AB = BD$. Na przedłużeniu przekątnej AC poza punkt C wybrano taki punkt E, że $CE = CD$. Wykaż, że $BE = BD$.

Zadanie 9.

Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, przy czym $AB \parallel DE$ oraz $BC \parallel EF$. Udowodnij, że $CD \parallel FA$.

Kamil Rychlewicz

Sukces Polaków na MEMO

VIII Środkowoeuropejska Olimpiada Matematyczna (Middle European Mathematical Olympiad, MEMO) odbyła się w dniach 18–24 września 2014 r. w niemieckim Dreźnie. W konkursie wystartowało sześćdziesięcioro zawodników z dziesięciu państw: Austrii, Chorwacji, Czech, Litwy, Niemiec, Polski, Słowacji, Słowenii, Szwajcarii oraz Węgier. W skład polskiej delegacji, wyłonionej na podstawie wyników LXV Olimpiady Matematycznej (2013/2014), weszli:

- Stanisław Frejlak (XIV LO w Warszawie),
- Damian Głodkowski (XIV LO w Warszawie),
- Adam Klukowski (XIV LO w Warszawie),
- Mateusz Kobak (LO im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie),
- Konrad Jan Paluszek (XIV LO w Warszawie),
- Mariusz Trela (Publiczne Gimnazjum nr 52 Ojców Pijarów w Krakowie).

Wszyscy wyżej wymienieni uczniowie byli laureatami poprzednich edycji OMG.

Zawody indywidualne odbyły się 20 września. Do rozwiązania były cztery zadania w pięć godzin. Przyznano trzy złote, jedenaście srebrnych i osiemnaście brązowych medali. Trzynaścioro uczestników zostało nagrodzonych wzmianką zaszczytną za poprawne rozwiązanie przynajmniej jednego zadania. Dzień później rozegrano zawody drużynowe, polegające na wspólnym rozwiązywaniu ośmiu zadań.

Polacy spisali się bardzo dobrze. W zawodach indywidualnych wywalczyli cztery srebrne oraz dwa brązowe medale. Srebra zdobyli: Adam Klukowski, Mariusz Trela (4. miejsce ex aequo), Konrad Jan Paluszek (7. miejsce) oraz Damian Głodkowski (13. miejsce). Stanisław Frejlak i Mateusz Kobak przywieźli brąz, zajmując 25. miejsce ex aequo. Wygrali Chorwat Ivan Lazarić oraz Węgier Kada Williams, nie tracąc ani jednego punktu.

W zawodach drużynowych zwyciężyli Polacy, rozwiązując siedem zadań i uzyskując 54 punkty na 64 możliwe. Na drugim miejscu uplasowali się Węgrzy, a na trzecim Chorwaci, tracąc odpowiednio dwa i osiem punktów do Polaków. Na uwagę zasługuje fakt, że tylko polska drużyna otrzymała maksymalną liczbę punktów za zadanie drugie — piekielnie trudną nierówność funkcyjną. Warto też podkreślić, że Polacy zaskoczyli wszystkich niezwykle eleganckim rozwiązaniem zadania szóstego — bardzo trudnej geometrii, którą oprócz Polaków rozwiązali tylko Węgrzy. Szkic tego rozwiązania prezentujemy poniżej.

Przyszłoroczne zawody odbędą się w mieście Koper w Słowenii pod koniec sierpnia 2015 roku.

Zadanie 6. (VIII MEMO, zawody drużynowe)

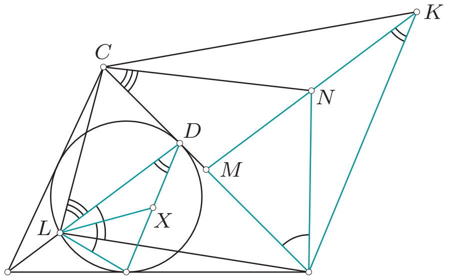
Okrąg k wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Prosta AD przecina okrąg k w punkcie $L \neq D$. Punkt K jest środkiem okręgu dopisanego do boku BC trójkąta ABC. Niech M i N będą odpowiednio środkami odcinków BC i KM. Wykazać, że punkty B, C, N i L leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie polskiej reprezentacji (szkic)

Niech F będzie punktem styczności okręgu k z odcinkiem AB (rys. 9). Wówczas zachodzą równości

$$\sphericalangle FLD = \sphericalangle FDB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle MBK\,.$$

Można dowieść, że proste AD i MK są równoległe (wykażemy to w następnym numerze *Kwadratu*), a zatem $\sphericalangle LDF = \sphericalangle MKB$. Na mocy cechy podobieństwa trójkątów kąt–kąt wnioskujemy, że $\triangle FLD \sim \triangle MBK$.



rys. 9

Niech X będzie środkiem odcinka FD. Wówczas $\triangle MBN \sim \triangle FLX$, zatem $\sphericalangle MBN = \sphericalangle FLX$. Ponadto prosta LB jest symedianą trójkąta FLD (więcej na ten temat w następnym numerze *Kwadratu*), skąd wynika, że $\sphericalangle FLX = \sphericalangle BLD$. To oznacza, że $\sphericalangle MBN = \sphericalangle BLD$.

Analogicznie $\sphericalangle MCN = \sphericalangle CLD$. Wobec tego

$$\sphericalangle BLC + \sphericalangle CNB = \sphericalangle MBN + \sphericalangle MCN + \sphericalangle CNB = 180^\circ\,.$$

Otrzymana równość oznacza, że na czworokącie $BLCN$ można opisać okrąg, co było do wykazania.

Tomasz Cieśla

Zmagania z ułamkami

Aby skrócić ułamek, w którego liczniku i mianowniku znajdują się dodatnie liczby całkowite, dzielimy obie liczby przez ich największy wspólny dzielnik. Można go wyznaczyć, rozkładając licznik i mianownik na czynniki pierwsze. Czasami jednak rozkład danej liczby na czynniki pierwsze może być kłopotliwy. W takiej sytuacji często pomocne jest następujące twierdzenie, zwane *algorytmem Euklidesa*.

Twierdzenie 1. (algorytm Euklidesa)

Jeśli a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz $a > b$, to $\mathrm{NWD}\,(a,b) = \mathrm{NWD}\,(a-b,b)$.

Dowód

Jeśli d jest dzielnikiem obu liczb a i b, to liczba d jest także dzielnikiem ich różnicy $a-b$. I odwrotnie: jeśli d jest dzielnikiem obu liczb $a-b$ i b, to liczba d jest także dzielnikiem ich sumy, czyli a. Wobec tego pary liczb a, b oraz $a-b$, b mają takie same wspólne dzielniki. W szczególności więc największy wspólny dzielnik liczb a, b jest równy największemu wspólnemu dzielnikowi liczb $a-b$, b, co kończy dowód twierdzenia.

Zadanie 1.

Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeżeli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to także ułamek

$$\frac{a+2b}{a+3b}$$

jest nieskracalny.

Rozwiązanie

Skoro ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to $\mathrm{NWD}\,(a,b)=1$. Wobec tego, wykorzystując kilkakrotnie algorytm Euklidesa, uzyskujemy

$$\mathrm{NWD}\,(a+2b, a+3b) = \mathrm{NWD}\,(a+2b, b) = \\ = \mathrm{NWD}\,(a+b, b) = \mathrm{NWD}\,(a,b) = 1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których ułamek $\dfrac{n^2+6}{n+1}$ jest nieskracalny.

Rozwiązanie

Podobnie jak wyżej, szukamy takich liczb naturalnych n, dla których największy wspólny dzielnik liczb n^2+6 i $n+1$ jest równy 1.

Korzystając z algorytmu Euklidesa i odejmując $(n-1)$-krotnie liczbę $n+1$ od liczby n^2+6, uzyskujemy

$$\mathrm{NWD}\,(n^2+6, n+1) = \\ = \mathrm{NWD}\,(n^2+6-(n-1)(n+1), n+1) = \\ = \mathrm{NWD}\,(7, n+1)\,.$$

Wobec tego największy wspólny dzielnik liczb n^2+6 i $n+1$ jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n+1$ nie jest podzielna 7. To oznacza, że dany ułamek jest nieskracalny dokładnie dla tych liczb n, które z dzielenia przez 7 nie dają reszty 6. To kończy rozwiązanie zadania.

Przyjmijmy, że liczba a z dzielenia przez b daje iloraz k oraz resztę r. Wtedy odejmując k-krotnie liczbę b od a, uzyskujemy r. Wobec tego k-krotne zastosowanie algorytmu Euklidesa prowadzi do zależności $\mathrm{NWD}\,(a,b) = \mathrm{NWD}\,(r,b)$.

Szczególną rolę w rozważaniach dotyczących podzielności odgrywają pary liczb, których największy wspólny dzielnik jest równy 1. Takie dwie liczby nazywamy *względnie pierwszymi*. Innymi słowy, liczby a i b są względnie pierwsze, jeśli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny.

Zauważmy, że jeśli liczby a i b są względnie pierwsze oraz liczby a i c są względnie pierwsze, to liczby a i bc są względnie pierwsze. Istotnie: gdyby ułamek $\frac{bc}{a}$ dało się skrócić, to pewien dzielnik pierwszy liczby a byłby także dzielnikiem przynajmniej jednej z liczb b lub c. To przeczy założeniu, że a, b oraz a, c to pary liczb względnie pierwszych.

Przyjmując $b=c$, uzyskujemy następujący wniosek: *jeżeli liczby a i b są względnie pierwsze, to liczby a i b^2 też są względnie pierwsze.*

Twierdzenie 2.

Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, przy czym liczby a i b są względnie pierwsze. Wówczas jeśli $a \mid bc$, to $a \mid c$.

Dowód

Teza twierdzenia jest spełniona dla $a=1$. Przyjmijmy zatem, że $a>1$ i rozpatrzmy rozkład na czynniki pierwsze liczby a. Załóżmy, że pewna liczba pierwsza p występuje w tym rozkładzie w potędze α. Wówczas liczba p nie może wystąpić w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby b, bowiem liczby a i b są względnie pierwsze. Wobec tego, skoro $a \mid bc$, to liczba p musi wystąpić w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby c w potędze co najmniej α. Analogicznie, każdy czynnik pierwszy liczby a występuje w rozkładzie liczby c z wykładnikiem nie mniejszym niż w rozkładzie liczby a. Zatem $a \mid c$, co kończy dowód.

Przyjmując $c=1$ w powyższym twierdzeniu, otrzymujemy następujący wniosek: *jeśli liczby a i b są względnie pierwsze oraz $a \mid b$, to $a=1$.*

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie pary a, b dodatnich liczb całkowitych, dla których liczba
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$
jest całkowita.

Rozwiązanie

Oznaczmy $d=\mathrm{NWD}(a,b)$. Wtedy dzieląc licznik i mianownik ułamka $\frac{a}{b}$ przez d, uzyskujemy ułamek nieskracalny $\frac{x}{y}$. Wobec tego $a=dx$ oraz $b=dy$, gdzie x i y są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Wówczas
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}\,.$$
Stąd wynika w szczególności, że x jest dzielnikiem liczby x^2+y^2 i w konsekwencji, skoro $x \mid x^2$, to $x \mid y^2$. Jednak liczby x i y^2 są względnie pierwsze, więc $x=1$.

Analogicznie dowodzimy, że $y=1$. W związku z tym uzyskujemy $a=d=b$. Pozostaje zauważyć, że jeśli $a=b$, to dana liczba jest całkowita i równa 2.

Zadanie 4. (VII OMG, zawody III stopnia)

Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a+b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Udowodnij, że $d \geqslant \sqrt{a+b}$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, oznaczmy $d=\mathrm{NWD}(a,b)$. Wtedy $a=dx$ oraz $b=dy$, gdzie x i y są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Stąd otrzymujemy
$$\frac{ab}{a+b}=\frac{d^2xy}{d(x+y)}=\frac{dxy}{x+y}$$
i zgodnie z warunkami zadania jest to liczba całkowita. Ponadto, na mocy algorytmu Euklidesa,
$$\mathrm{NWD}(x+y,x)=\mathrm{NWD}(y,x)=1\,,$$
$$\mathrm{NWD}(x+y,y)=\mathrm{NWD}(x,y)=1\,.$$
Wobec tego liczby xy oraz $x+y$ są względnie pierwsze. Skoro jednak $x+y \mid dxy$, więc na mocy twierdzenia 2 $x+y \mid d$. Stąd wniosek, że $d \geqslant x+y$. Po pomnożeniu tej nierówności stronami przez d uzyskujemy $d^2 \geqslant a+b$, czyli $d \geqslant \sqrt{a+b}$. To kończy rozwiązanie zadania.

Poniżej proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5. (I Międzynarodowa OM, 1959 r.)

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n ułamek $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ jest nieskracalny.

Zadanie 6. (VI OMG, zawody III stopnia)

Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Wykaż, że liczba p^2+q^2 nie jest podzielna przez liczbę $p+q$.

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie pary a, b dodatnich liczb całkowitych, dla których liczba $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{2}$ jest całkowita.

Zadanie 8.

Liczby a oraz b są całkowite dodatnie. Wykaż, że jeżeli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to także ułamek
$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$
jest nieskracalny.

Waldemar Pompe

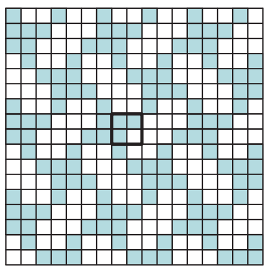
Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Kolorowe szachownice

8. Pomaluj szachownicę w poziome paski, złożone na zmianę z wyróżnionych i niewyróżnionych pól. Zauważ, że każde tetramino w kształcie litery L pokrywa nieparzystą liczbę wyróżnionych pól, a każdy kwadrat 2×2 pokrywa parzystą liczbę wyróżnionych pól.

9. Wyróżnij 17 pól szachownicy w sposób podobny do przedstawionego na rysunku 3 tak, aby każdy prostokąt 1×3 pokrywał dokładnie jedno wyróżnione pole. Następnie wyróżnij inny zestaw 17 pól szachownicy. Możliwe położenia klocka 1×1 to pola wyróżnione jednocześnie w obu tych przypadkach; jest ich 9.

10. Nie jest to możliwe. Skorzystaj z poniższego rysunku, aby uzasadnić, że po wykonaniu dowolnej liczby dozwolonych operacji, na płaszczyźnie zawsze będzie parzysta liczba wyróżnionych pól koloru czarnego. Zauważ, że wyróżniony kwadrat 2×2 zawiera nieparzystą liczbę wyróżnionych pól.



Nierówność między średnimi

5 (a), (b). Użyj nierówności między średnimi dla trzech odpowiednio dobranych liczb.

6. Skorzystaj z nierówności między średnimi dla następujących liczb: $a_1,\ \frac{1}{2}a_2,\ \frac{1}{2}a_2,\ \frac{1}{3}a_3,\ \frac{1}{3}a_3,\ \frac{1}{3}a_3,\ \ldots$