Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

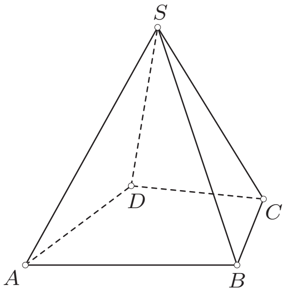
Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

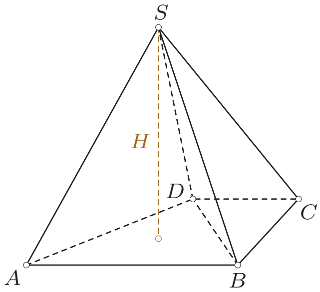
Nr 22
wrzesień 2018
ISSN 2300-0708

Objętość ostrosłupa

Jeżeli punkt S, który nie leży w płaszczyźnie wielokąta $\mathcal{W}$, połączymy odcinkami z wierzchołkami tego wielokąta, to otrzymamy bryłę przestrzenną zwaną *ostrosłupem* o podstawie wielokąta $\mathcal{W}$ oraz wierzchołku S. Na rysunku 1 przedstawiono ostrosłup o podstawie czworokąta $ABCD$. Ostrosłup o podstawie trójkąta nazywamy *czworościanem*.



rys. 1



rys. 2

Ostrosłupy można wykorzystać przy konstruowaniu przeróżnych wielościanów oraz obliczaniu ich objętości. Przydatny jest wówczas wzór na objętość V ostrosłupa:

$$V=\frac{1}{3}\cdot[\mathcal{W}]\cdot H\,,$$

gdzie $[\mathcal{W}]$ oznacza pole wielokąta $\mathcal{W}$, a H — wysokość ostrosłupa, czyli odległość od punktu S do płaszczyzny, w której znajduje się wielokąt $\mathcal{W}$.

Wzór ten ma wiele zastosowań. Oto jedno z nich. Przypuśćmy, że podstawą ostrosłupa jest trapez $ABCD$, w którym boki AB i CD są równoległe oraz $CD=\frac{1}{2}AB$. Oznaczmy przez h wysokość trapezu $ABCD$. Wówczas

$$[ABD]=\frac{1}{2}AB\cdot h=CD\cdot h=2[BCD]\,.$$

Ostrosłupy $ABDS$ oraz $BCDS$ mają wspólną wysokość H opuszczoną z wierzchołka S (rys. 2). Z powyższego wzoru na objętość ostrosłupa wynika wtedy natychmiast, że objętość czworościanu $ABDS$ jest dwa razy większa od objętości czworościanu $BCDS$.

W dalszej części pisząc *sześcian* $ABCDA'B'C'D'$, będziemy rozumieli, że jego wierzchołki A, B, C, D oraz A', B', C', D' oznaczone są w taki sposób, by kwadraty $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$ były przeciwległymi ścianami sześcianu, a odcinki AA', BB', CC', DD' jego krawędziami (rys. 3).

Zadanie 1.

Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi a. Oblicz objętość czworościanu $ACB'D'$ (rys. 3).

Rozwiązanie

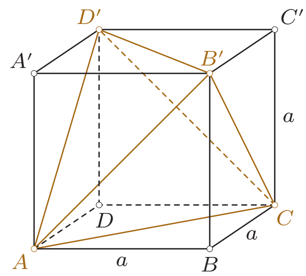
Czworościan $ACB'D'$ powstaje z danego sześcianu poprzez odcięcie od niego czterech ostrosłupów trójkątnych: $ABCB'$, $B'A'D'A$, $B'C'D'C$ oraz $ADCD'$. Każdy z tych ostrosłupów ma objętość równą

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a=\frac{a^3}{6}\,.$$

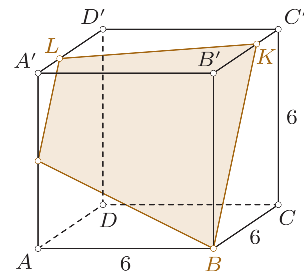
Wobec tego objętość czworościanu $ACB'D'$ jest równa

$$a^3-4\cdot\frac{a^3}{6}=\frac{a^3}{3}\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 2.

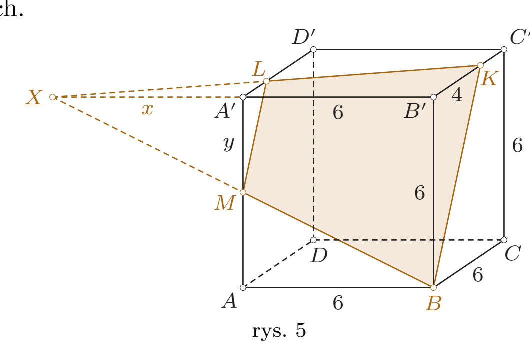
Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi 6 (rys. 4). Punkty K, L leżą odpowiednio na krawędziach $B'C'$ oraz $A'D'$, przy czym

$$B'K=D'L=4\,.$$

Płaszczyzna przechodząca przez punkty B, K, L rozcina sześcian na dwie bryły. Wyznacz objętości obu tych brył.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych KL i $A'B'$, a przez M punkt przecięcia prostych BX i AA' (rys. 5). Wówczas punkty K, L, M, B leżą w jednej płaszczyźnie (wyznaczonej przez punkty K, B, X), a czworokąt $KLMB$ jest przekrojem wyznaczającym podział sześcianu na dwie bryły o szukanych objętościach.



rys. 5

Jedną z tych brył jest wielościan $\mathcal{V}$ o wierzchołkach B, B', K, M, A', L. Powstaje on z ostrołupa $BB'KX$ poprzez odcięcie od niego mniejszego ostrosłupa $MA'LX$.

Aby wyznaczyć objętości obu tych ostrosłupów, obliczymy najpierw długości x, y odpowiednio odcinków XA', MA'. Z podobieństwa trójkątów $XA'L$ oraz

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

$XB'K$ uzyskujemy

$$\frac{x}{x+6}=\frac{2}{4},$$

skąd $x=6$. Z kolei z podobieństwa trójkątów $XA'M$ oraz $XB'B$ otrzymujemy

$$\frac{y}{6}=\frac{x}{x+6},$$

skąd, po uwzględnieniu wyznaczonej wartości $x=6$, dostajemy $y=3$.

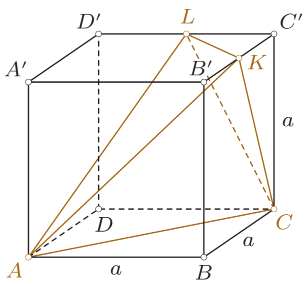
Możemy już teraz bez trudu wyznaczyć objętość wielościanu $\mathcal{V}$, która równa się

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot 4}{2}\cdot(x+6)-\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot y}{2}\cdot x=42\,.$$

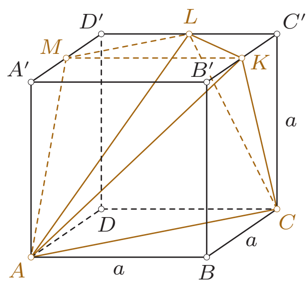
Objętość pozostałej części sześcianu wynosi $6^3-42=174$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 3.

Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi a (rys. 6). Punkty K, L są odpowiednio środkami krawędzi $B'C'$, $C'D'$. Oblicz objętość czworościanu $ACKL$.



rys. 6



rys. 7

Rozwiązanie

Niech M będzie środkiem krawędzi $A'D'$ (rys. 7). Wtedy ML jest linią środkową w trójkącie $A'C'D'$, a zatem odcinki ML i $A'C'$ są równoległe oraz $ML=\frac{1}{2}A'C'$. W związku z tym również odcinki ML oraz AC są równoległe oraz $ML=\frac{1}{2}AC$.

Innymi słowy, czworokąt $ACLM$ jest trapezem o podstawach AC oraz ML, których długości spełniają warunek $ML=\frac{1}{2}AC$. W myśl obserwacji z początku artykułu, objętość czworościanu $ACKL$ jest dwa razy większa od objętości czworościanu $AMLK$. Z kolei objętość czworościanu $AMLK$ równa się

$$\frac{1}{3}\cdot[KML]\cdot AA'=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot a=\frac{a^3}{12}\,.$$

W konsekwencji objętość czworościanu $ACKL$ wynosi $a^3/6$, co kończy rozwiązanie zadania.

Tradycyjnie proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4. (XIII OMJ, zawody I stopnia)

Kwadrat $ABCD$ o boku 4 jest podstawą prostopadłościanu $ABCDA'B'C'D'$. Krawędzie boczne AA', BB', CC', DD' tego prostopadłościanu mają długość 7. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na odcinkach AA', BB', CC', przy czym

$$AK=3,\quad BL=2,\quad CM=5\,.$$

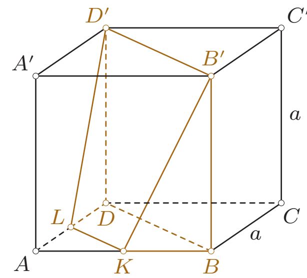
Płaszczyzna przechodząca przez punkty K, L, M rozcina prostopadłościan na dwie bryły. Wyznacz objętości obu tych brył.

Zadanie 5.

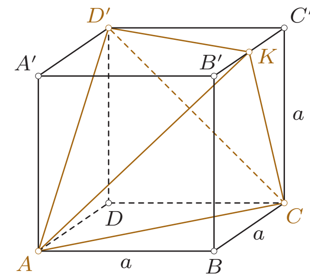
Punkty K, L są odpowiednio środkami krawędzi $B'C'$ oraz $C'D'$ sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi 6. Płaszczyzna przechodząca przez punkty A, K, L rozcina sześcian na dwie bryły. Oblicz objętości obu tych brył.

Zadanie 6.

Punkty K, L są odpowiednio środkami krawędzi AB oraz AD sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi 6 (rys. 8). Oblicz objętość bryły o wierzchołkach B, D, L, K, B', D'.



rys. 8



rys. 9

Zadanie 7.

Punkt K jest środkiem krawędzi $B'C'$ sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi a (rys. 9). Oblicz objętość czworościanu $ACKD'$.

Waldemar Pompe

Parzystość

Nie ma takiej liczby całkowitej, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta. To stwierdzenie, mimo swej prostoty, okazuje się niezwykle użyteczne.

Zadanie 1.

Wykaż, że nie istnieje wielościan wypukły, który ma dokładnie dziewięć ścian i którego każda ściana jest trójkątem.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że taki wielościan istnieje. Niech k będzie liczbą jego krawędzi. Ponumerujmy krawędzie liczbami od 1 do k. Dla każdej ściany naszego wielościanu zapiszmy na tablicy numery krawędzi, które są bokami tej ściany. Ponieważ mamy dziewięć ścian, a każda z nich ma trzy boki, więc na tablicy pojawi się $9\cdot 3=27$ liczb.

Z drugiej strony, każda krawędź jest bokiem dokładnie dwóch ścian. Wobec tego każda z liczb $1,2,\ldots,k$ zostanie wypisana dwukrotnie. Oznacza to, że na tablicy wypiszemy $2k$ liczb.

Zatem $2k=27$. Otrzymujemy sprzeczność, gdyż 27 nie jest liczbą parzystą. Udowodniliśmy więc, że taki dziewięciościan nie istnieje.

Zadanie 2.

Czy istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d, e, f, że liczby

$$a-b,\ b-c,\ c-d,\ d-e,\ e-f,\ f-a,$$

wypisane w pewnym porządku, są kolejnymi liczbami całkowitymi?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że takie liczby nie istnieją.

Rozważmy sześć kolejnych liczb całkowitych n, $n+1$, …, $n+5$. Ich suma wynosi

$$n+(n+1)+\ldots+(n+5)=6n+15=2\cdot(3n+7)+1,$$

jest więc liczbą nieparzystą. Z drugiej strony,

$$(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e)+(e-f)+(f-a)=0.$$

Ponieważ 0 jest liczbą parzystą, więc liczby o własności opisanej w treści zadania nie istnieją.

W rozwiązaniach wielu zadań olimpijskich pojawiają się tzw. *niezmienniki*, czyli pewne wielkości lub własności, które nie zmieniają się podczas wykonywania operacji opisanych w treści zadania. Często spotykanym niezmiennikiem jest parzystość pewnej liczby.

Zadanie 3.

Na tablicy narysowano 20 kółek i 25 krzyżyków. Ruch polega na starciu z tablicy pewnych dwóch symboli, a następnie dorysowaniu jednego symbolu zgodnie z następującymi regułami:

- Jeśli starte zostały dwa kółka lub dwa krzyżyki, to dorysowujemy na tablicy kółko.
- Jeśli starte zostały kółko i krzyżyk, to dorysowujemy na tablicy krzyżyk.

Udowodnij, że po wykonaniu 44 ruchów na tablicy pozostanie krzyżyk, niezależnie od doboru ruchów.

Rozwiązanie

Zauważmy, że po wykonaniu ruchu liczba krzyżyków nie zmienia swej parzystości, gdyż albo liczba ta w ogóle się nie zmienia, albo zmniejsza się o dwa.

Na początku liczba krzyżyków jest nieparzysta, więc po wykonaniu każdego ruchu liczba krzyżyków pozostanie nieparzysta. Oznacza to w szczególności, że po każdym ruchu na tablicy znajduje się co najmniej jeden krzyżyk. W takim razie symbol, który pozostaje na tablicy na samym końcu, musi być krzyżykiem.

Zadanie 4.

Pola szachownicy o wymiarach 9×9 pokolorowano w tradycyjny w sposób, przy czym jej narożne pola są białe. Ruch polega na wybraniu dwóch sąsiednich pól i przemalowaniu ich na przeciwny kolor (tzn. jeśli wybrane pole jest białe, to zmieniamy jego kolor na czarny i vice versa). Czy można dobierać ruchy w taki sposób, aby w pewnym momencie wszystkie pola były czarne?

Rozwiązanie

Zauważmy, że po każdym ruchu liczba czarnych pól zwiększa się o dwa, gdy wybierzemy dwa pola białe, nie zmienia się, gdy wybierzemy po jednym polu w każdym kolorze oraz zmniejsza się o dwa, gdy wybierzemy dwa pola czarne. Zatem wykonanie każdego ruchu nie zmienia parzystości liczby czarnych pól. Ponieważ na początku liczba czarnych pól wynosi 40, to po każdym ruchu liczba czarnych pól jest parzysta. Na całej planszy znajduje się 81 pól, a więc jest to liczba nieparzysta. Nie da się zatem tak dobierać ruchów, aby wszystkie pola stały się czarne.

Zadanie 5.

Na tablicy narysowano 10 kółek, 11 krzyżyków oraz 12 kwadracików. Ruch polega na starciu dwóch różnych symboli, a następnie narysowaniu symbolu różnego od obu startych przed chwilą. Antkowi udało się wykonać 32 ruchy i na tablicy pozostał jeden symbol. Jaki?

Rozwiązanie

Zauważmy, że w każdym ruchu albo ścieramy jeden krzyżyk albo dorysowujemy jeden krzyżyk. Zatem liczba krzyżyków po każdym ruchu zmienia swoją parzystość. Po wykonaniu 32 ruchów liczba krzyżyków zmieni swoją parzystość 32 razy, a więc na końcu jej parzystość będzie taka sama jak na początku. Skoro na początku było 11 krzyżyków, to na końcu liczba krzyżyków jest nieparzysta. Ponieważ na końcu na tablicy pozostał tylko jeden symbol, musi być to krzyżyk.

Zadanie 6.

Na tablicy wypisano liczby $1,2,\ldots,10$. Ruch polega na wybraniu trzech liczb a, b, c znajdujących się na tablicy i zastąpieniu ich liczbami $2a+b$, $2b+c$, $2c+a$. Czy po wykonaniu pewnej liczby ruchów możemy otrzymać sytuację, w której wszystkie 10 liczb na tablicy jest równych?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że wykonanie ruchu nie zmienia parzystości sumy wszystkich liczb. Istotnie, gdy wykonamy ruch na liczbach a, b, c, to suma wszystkich liczb zwiększy się o

$$(2a+b)+(2b+c)+(2c+a)-a-b-c=2(a+b+c),$$

czyli o liczbę parzystą. Zatem parzystość sumy liczb na tablicy nie zmienia się.

Ponieważ $1+2+\ldots+10=55$, więc suma liczb na tablicy zawsze pozostanie nieparzysta. Nie jest więc możliwe uzyskanie dziesięciu równych liczb na tablicy, gdyż wówczas ich suma byłaby postaci $10n$, czyli byłaby liczbą parzystą.

Na koniec proponujemy Czytelnikowi zadania do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich pojawią się w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 7.

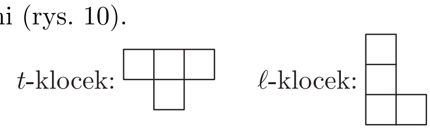
Czy istnieje wielościan, który ma 11 wierzchołków oraz tę własność, że w każdym wierzchołku schodzą się dokładnie trzy krawędzie?

Zadanie 8.

Na tablicy napisano liczby $1,2,3,\ldots,2018$. Ruch polega na wybraniu dwóch liczb z tablicy i zastąpieniu ich wartością bezwzględną ich różnicy. Po wykonaniu 2017 ruchów na tablicy pozostanie jedna liczba. Czy może być nią 0?

Zadanie 9.

Udowodnij, że szachownicy o wymiarach 8×8 nie można pokryć siedmioma t-klockami i dziewięcioma ℓ-klockami (rys. 10).



rys. 10

Klocki można obracać i odwracać na drugą stronę.

Tomasz Cieśla

Sukces Polek na EGMO

W dniach 9–15 kwietnia 2018 r. we Florencji we Włoszech odbyła się siódma edycja Europejskiej Olimpiady Matematycznej Dziewcząt (European Girls' Mathematical Olympiad — EGMO). Polskę reprezentowały:

- Aleksandra Cynk (V LO, Kraków)
- Jadwiga Czyżewska (XIV LO, Warszawa)

- Aleksandra Kowalska (LO Sióstr Prezentek, Rzeszów)
- Weronika Lorenczyk (VIII LO, Katowice)

Delegacja została wyłoniona na podstawie wyników LXVIII Olimpiady Matematycznej. Wszystkie dziewczęta były w przeszłości laureatkami OMG lub OMJ.

EGMO z roku na rok się rozrasta. W tym roku uczestniczyło aż 195 dziewcząt z 52 krajów. Szczególnie zauważalny jest wzrost liczby uczestniczących krajów spoza Europy. W tegorocznej edycji było ich aż 16.

Konkurs składał się z dwóch dni zawodów. Każdego dnia uczestniczki rozwiązywały po 3 zadania. Miały na to 4,5 godziny.

Polki zaprezentowały się znakomicie. Aleksandra Kowalska z wynikiem 40 punktów (na 42 możliwe do uzyskania) zajęła 7. miejsce i została nagrodzona złotym medalem. Srebra wywalczyły Weronika Lorenczyk (25 punktów, 35. miejsce) oraz Aleksandra Cynk (23 punkty, 46. miejsce), a Jadwiga Czyżewska (20 punktów, 62. miejsce) zdobyła medal brązowy. W klasyfikacji drużynowej Polska zajęła 4. miejsce, ustępując jedynie zawodniczkom z Rosji, Stanów Zjednoczonych oraz Wielkiej Brytanii.

Organizatorzy zapewnili też rozrywkę w postaci zawodów drużynowych, które polegały na rozwiązaniu w ośmioosobowych grupach jak największej liczby zagadek matematycznych. Dziewczyny połączyły siły z ekipą z Izraela i zajęły drugie miejsce, tuż za drużyną złożoną z zawodniczek z Ukrainy i Stanów Zjednoczonych.

Tydzień pełen wrażeń został zwieńczony uroczystą ceremonią zamknięcia w Teatro Verdi, a następnie pożegnalnym bankietem połączonym z zabawą taneczną w spektakularnym Palazzo Borghese.

W wolnym czasie dziewczęta zwiedziły przepiękną Florencję, uczestnicząc w grze terenowej i poznając przy okazji pasjonatki matematyki z całego świata. Odbyła się również wycieczka do Pizy, w trakcie której dziewczyny oprócz podziwiania zabytków miały okazję zjeść tradycyjną włoską pizzę.

Na koniec przedstawimy rozwiązanie jednego z zadań z tegorocznych zawodów. Nie sprawiło ono naszym zawodniczkom większych kłopotów — wszystkie uzyskały maksymalną liczbę 7 punktów. Autorką poniższego krótkiego rozwiązania jest Weronika Lorenczyk.

Zadanie 1.

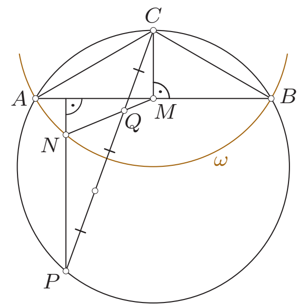
Dany jest trójkąt ABC, w którym spełnione są równości $CA = CB$ oraz $\sphericalangle ACB = 120°$. Niech M będzie środkiem boku AB. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Na odcinku CP wybrano taki punkt Q, że $QP = 2QC$. Prosta przechodząca przez punkt P prostopadła do prostej AB przecina prostą MQ w punkcie N. Dowieść, że dla zmieniającego położenie punktu P, punkt N leży na ustalonym okręgu.

Rozwiązanie

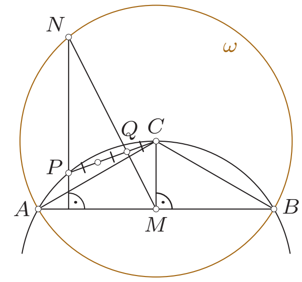
Proste CM, PN są równoległe, gdyż obie są prostopadłe do prostej AB (rys. 11 oraz 12). Wobec tego

$$\frac{PN}{CM} = \frac{PQ}{CQ} = 2,$$

czyli $PN = 2 \cdot CM$. Stąd wniosek, że punkt N leży na okręgu ω powstałym poprzez przesunięcie okręgu opisanego na trójkącie ABC o wektor $\overrightarrow{PN} = 2 \cdot \overrightarrow{MC}$. Ale zarówno okrąg opisany na trójkącie ABC, jak i wektor $\overrightarrow{MC}$ nie zależą od wyboru punktu P, wobec czego okrąg ω również od niego nie zależy. To kończy rozwiązanie.



rys. 11



rys. 12

W rozwiązaniu Weronika nie wykorzystała założenia $\sphericalangle ACB = 120°$; można więc je pominąć, a teza zadania pozostanie wciąż prawdziwa. Co więcej, jeśli zdefiniujemy punkt M nie jako środek odcinka AB, a jako spodek wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C (w przypadku $CA = CB$ te definicje są oczywiście równoważne), możemy pominąć założenie o równości odcinków CA i CB. Dodatkowo do rozwiązania zadania nie potrzebujemy, by punkt Q dzielił odcinek CP w stosunku $1:2$. Wystarczy jedynie, by dzielił go w ustalonym stosunku, niezależnym od wyboru punktu P.

Dominika Regiec

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Dorysujmy lustrzane odbicie

6. Odbij symetrycznie punkt B względem dwusiecznej kąta zewnętrznego przy C.

7. *Odpowiedź:* $20°$. Odbij symetrycznie punkty A i B odpowiednio względem prostych BC i AC. Znajdź trójkąt równoboczny.

8. *Odpowiedź:* $\frac{1}{2}(AC + BC - AB)$. Odbij symetrycznie punkt C względem prostych AI oraz BI.

9. Odbij symetrycznie punkt C względem prostej AB, otrzymując punkt C'. Uzasadnij, że łuk $C'D$ stanowi $\frac{1}{4}$ okręgu ω.

10. Uzasadnij, że opisaną własność ma średnica d równoległa do odcinka łączącego końce łamanej s. Załóż nie wprost, że punkt wspólny istnieje i odbij symetrycznie fragment łamanej s względem d.

11. Uzasadnij, że istnieje punkt P symetryczny jednocześnie do punktu A względem prostej KM oraz do punktu B względem prostej LM. Zauważ, że trójkąt KLP jest prostokątny.

12. Wykaż, że każda z sum jest równa CL. Odbij symetrycznie punkty A i E względem prostej BC, a punkt B — względem prostej AC, otrzymując odpowiednio punkty A', E', B'. Zauważ, że trójkąt CEE' jest równoboczny, a punkty C, E, K, E' leżą na jednym okręgu. Uzasadnij, że punkt L leży na symetralnej odcinka $A'C$.

Najmniejsze rozwiązanie

4., 5. Postępuj podobnie jak w rozwiązaniu zadania 2.

6. Dodaj oba równania stronami i wykaż, że otrzymane równanie nie ma rozwiązań.

7. Udowodnij, że liczby a, b, c, d są parzyste. Wywnioskuj stąd, że liczba n jest parzysta.

8. Postępuj podobnie jak w rozwiązaniu zadania 3.

9. Postępuj podobnie jak w rozwiązaniu zadania 1.

„Kwadrat” redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omj@gmail.com Nakład: 2000 egz.