Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 12
czerwiec 2014
ISSN 2300-0708
Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Kwadraty i dzielniki raz jeszcze

W poprzednim *Kwadracie* badaliśmy powiązania pomiędzy liczbami a ich dzielnikami, szczególną uwagę poświęcając liczbom, które są kwadratami. W tym numerze kontynuujemy tę tematykę, tym razem przyglądając się dokładniej liczbie dzielników i ich sumie.

Przypomnijmy, że każdą liczbę całkowitą n większą od 1 można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{\alpha_j}, \qquad (*)$$

gdzie czynniki $p_1, p_2, \ldots, p_j$ to uporządkowane rosnąco różne liczby pierwsze, natomiast $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ to ich całkowite dodatnie wykładniki. Przykładowo, dla liczby 3500 zapisanej w postaci

$$3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

mamy $j = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$.

Z postaci $(*)$ można wywnioskować, że dzielnikami liczby n są dodatnie liczby całkowite d postaci

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{\beta_j}, \qquad (**)$$

gdzie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$ to liczby całkowite spełniające warunki $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$, ..., $0 \leqslant \beta_j \leqslant \alpha_j$. Odwołując się do przykładu liczby $3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$, widzimy, że jej dzielnikiem jest liczba $2^2 \cdot 5$ (wtedy $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$), ale dzielnikiem nie jest liczba $2 \cdot 11$ (bo 11 nie występuje wśród czynników pierwszych liczby 3500) ani liczba $5 \cdot 7^4$ (bo wykładnik przy 7 jest większy niż w liczbie 3500).

Korzystając z tej obserwacji, łatwo wyznaczyć liczbę dodatnich dzielników danej liczby. Na przykład liczba $3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ ma

$$(2+1)(3+1)(1+1) = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

różne dzielniki. Możemy bowiem na 3 sposoby wybrać wykładnik przy 2 (0, 1 lub 2), na 4 sposoby przy 5 (0, 1, 2 lub 3) oraz na 2 sposoby przy 7 (0 lub 1). Podobne rozumowanie pozwala sformułować i udowodnić następujące ogólne twierdzenie.

Twierdzenie 4.

Liczba całkowita n większa od 1, zapisana w postaci $(*)$, posiada

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_j + 1)$$

różnych dzielników.

Dowód

Dzielniki liczby n są postaci $(**)$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_j$ to czynniki występujące w postaci $(*)$ liczby n. Wobec tego każdy dzielnik jest jednoznacznie wyznaczony przez ciąg wykładników $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j)$.

Wykładnik β_1 jest dowolną liczbą całkowitą spełniającą warunki $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, a takich liczb jest $\alpha_1 + 1$. Podobnie można na $\alpha_2 + 1$ sposobów wybrać β_2 i tak dalej, wreszcie na $\alpha_j + 1$ sposobów można wybrać β_j. Ponieważ wybór żadnego z wykładników nie zależy od wyboru pozostałych, cały ciąg wykładników $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j)$ wybrać można na $(\alpha_1+1) \cdot (\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_j+1)$ sposobów. Tyle jest zatem różnych dzielników liczby n, co kończy dowód.

Powyższe twierdzenie pozwala łatwiej rozwiązać niektóre problemy z pierwszej części artykułu (zamieszczonej w poprzednim numerze *Kwadratu*), na przykład zadania 1 i 9. Zobaczmy jego zastosowanie w nieco trudniejszej wersji obu tych zadań.

Zadanie 14.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite, które mają dokładnie dziewięć dodatnich dzielników.

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia 4, liczba n przedstawiona w postaci $(*)$ ma $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_j + 1)$ różnych dzielników. Iloczyn ten jest równy 9 wtedy i tylko wtedy, gdy w powyższym wyrażeniu jest dokładnie jeden nawias i liczba w nim jest równa 9 albo gdy są dokładnie dwa nawiasy i w obydwu jest liczba 3. W pierwszym przypadku oznacza to, że liczba n jest postaci p^8 dla pewnej liczby pierwszej p; w drugim przypadku n jest postaci $p_1^2 p_2^2$, gdzie p_1 i p_2 to różne liczby pierwsze.

Zadanie 15.

Czy istnieje liczba dodatnia o dokładnie 2014 dodatnich dzielnikach?

Rozwiązanie

Tak, na przykład liczba 2^{2013} ma, na mocy twierdzenia 4, liczbę dzielników równą $2013 + 1 = 2014$.

Analogicznie dla dowolnej liczby całkowitej $k > 1$ istnieje liczba n posiadającą dokładnie k dodatnich dzielników.

Zadanie 16.

Czy istnieje taka liczba całkowita $n > 2$, że liczba $n!$ ma dokładnie 101 dodatnich dzielników?

Rozwiązanie

Nie. Dla $n > 2$ liczba $n!$ ma przynajmniej dwa różne czynniki pierwsze w rozkładzie: 2 i 3. Wówczas, na mocy twierdzenia 4, liczba dzielników $n!$ jest złożona, zatem nie może być równa 101.

Przypomnijmy teraz twierdzenia 1 i 2, które udowodniliśmy w artykule *Kwadraty i dzielniki* w poprzednim numerze *Kwadratu*.

Twierdzenie 1.

Dodatnia liczba całkowita ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem liczby całkowitej.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 2.

Liczba całkowita większa od 1 *jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki są parzyste.*

Korzystając z twierdzenia 4, udowodnimy raz jeszcze twierdzenie 1.

Dowód

Liczba 1 jest kwadratem i ma jeden dzielnik.

Liczba $n>1$, zapisana w postaci $(*)$ ma, na mocy twierdzenia 4, $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_j+1)$ różnych dzielników. Iloczyn ten jest nieparzysty wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są nieparzyste, czyli gdy wszystkie wykładniki $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j$ są parzyste. To z kolei, na mocy twierdzenia 2, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy rozważana liczba n jest kwadratem liczby całkowitej, co kończy dowód.

Twierdzenie 5.

Dana jest dodatnia liczba całkowita n zapisana w postaci $(*)$. Wówczas suma wszystkich jej dodatnich dzielników wynosi

$$(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})\cdot(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot(1+p_j+p_j^2+\ldots+p_j^{\alpha_j}).$$

Dowód

Wymnażając nawiasy w powyższym wyrażeniu, uzyskujemy sumę wszystkich iloczynów postaci $(**)$, przy czym każdy z nich występuje dokładnie jeden raz. Jest to więc żądana suma dzielników liczby n, co kończy dowód.

Korzystając z twierdzenia 5, rozwiążemy jeszcze raz zadanie 3, w którym mowa właśnie o sumie dzielników.

Zadanie 3. (LXIV OM, zawody I stopnia)

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykaż, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Jeśli $n=1$, to n jest kwadratem. Niech teraz $n>1$. Przedstawmy liczbę n w postaci $(*)$, wtedy na mocy twierdzenia 5 suma jej dodatnich dzielników równa jest

$$(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})\cdot(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot(1+p_j+p_j^2+\ldots+p_j^{\alpha_j}).$$

Skoro iloczyn ten jest nieparzysty, to każdy jego czynnik jest nieparzysty.

Jeśli $p_1=2$, to czynnik $1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1}$ jest liczbą nieparzystą niezależnie od wartości α_1. Z kolei dla każdej nieparzystej liczby pierwszej p_i jej kwadrat, sześcian itd. również są nieparzyste, więc suma $1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i}$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy ma nieparzystą liczbę składników, czyli gdy wykładnik α_i jest parzysty.

Oznacza to, że w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n wszystkie czynniki nieparzyste występują w parzystych potęgach. Korzystając z twierdzenia 2, otrzymujemy stąd wniosek, że

$$n=2^k\cdot m^2,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną, m zaś — dodatnią liczbą całkowitą. Wobec tego $n=\left(2^{\frac{k}{2}}\cdot m\right)^2$, jeśli liczba k jest parzysta, oraz $n=2\cdot\left(2^{\frac{k-1}{2}}\cdot m\right)^2$, jeśli liczba k jest nieparzysta. To kończy dowód.

Na zakończenie rozwiążmy jeszcze jedno zadanie o rozkładzie na czynniki pierwsze i kwadratach.

Zadanie 17.

Dany jest zbiór 33 dodatnich liczb całkowitych, z których żadna nie ma dzielnika pierwszego większego od 11. Wykaż, że istnieją w tym zbiorze takie dwie liczby, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Każdą dodatnią liczbę całkowitą, która nie ma dzielnika pierwszego większego od 11, można zapisać w następującej postaci:

$$2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot 7^{\alpha_4}\cdot 11^{\alpha_5},$$

gdzie $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Iloczyn dwóch takich liczb jest więc postaci

$$(2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_3}\cdot 7^{\gamma_4}\cdot 11^{\gamma_5})\cdot(2^{\delta_1}\cdot 3^{\delta_2}\cdot 5^{\delta_3}\cdot 7^{\delta_4}\cdot 11^{\delta_5})= \\ =2^{\gamma_1+\delta_1}\cdot 3^{\gamma_2+\delta_2}\cdot 5^{\gamma_3+\delta_3}\cdot 7^{\gamma_4+\delta_4}\cdot 11^{\gamma_5+\delta_5},$$

stąd na mocy twierdzenia 2 jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z wykładników $\gamma_1+\delta_1,\ldots,\gamma_5+\delta_5$ jest liczbą parzystą. Suma dwóch liczb całkowitych jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy obie te liczby są tej samej parzystości.

Każdy z wykładników $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$ może być liczbą parzystą lub nieparzystą, co oznacza, że jeśli bierzemy pod uwagę jedynie parzystość, istnieje $2^5=32$ różnych ciągów wykładników $(\alpha_1,\ldots,\alpha_5)$. Mamy dane 33 liczby, zatem pewne dwie spośród nich muszą mieć takie same, pod względem parzystości, odpowiednie wykładniki. Iloczyn tych właśnie dwóch liczb ma więc wszystkie sumy $\gamma_1+\delta_1,\ldots,\gamma_5+\delta_5$ parzyste i na mocy twierdzenia 2 jest poszukiwanym kwadratem liczby całkowitej.

Na koniec jak zwykle proponujemy Czytelnikom kilka zadań do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 18.

Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą posiadającą dokładnie 22 dodatnie dzielniki.

Zadanie 19.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite podzielne przez 100, które mają dokładnie 15 dodatnich dzielników.

Zadanie 20.

Czy liczba o dokładnie 100! dodatnich dzielnikach może być sześcianem liczby całkowitej?

Zadanie 21.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite, dla których suma ich dodatnich dzielników równa jest 31.

Zadanie 22.

Dodatnie liczby całkowite n i k są względnie pierwsze. Wyznacz sumę wszystkich dodatnich dzielników liczby nk, znając sumy dodatnich dzielników każdej z liczb n i k.

Zadanie 23.

Sprawdź, że suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n, zapisanej w postaci $(*)$, równa jest

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_j^{\alpha_j+1}-1}{p_j-1}.$$

Joanna Jaszuńska

Zadaniowe laboratorium

W artykule *Maksymalny, ale czy największy?*, zamieszczonym w 8. numerze *Kwadratu*, Wojciech Guzicki pisze o zadaniu 4. z zawodów drugiego stopnia VIII edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Chciałbym rozwinąć jego myśl w nieco innym kierunku. Chociaż zadanie było dość trudne dla gimnazjalistów, to przygoda z nim nie musi zakończyć się na znalezieniu rozwiązania. Bardzo skuteczną metodą w nauce matematyki jest modyfikowanie poznanych problemów. W przypadku zadania trudnego, z którym nie potrafimy sobie poradzić, często warto spróbować najpierw uprościć zadanie i rozpatrzeć jego łatwiejszą wersję – na przykład wybrany przypadek szczególny – a dopiero później zabierać się za rozwiązanie wyjściowego problemu. Jeśli odniesiemy sukces, warto „rozejrzeć się na boki” i spróbować zmodyfikować treść naszego zadania, aby sprawdzić, czy zastosowaną przez nas metodę można wykorzystać w innych sytuacjach.

W niniejszym artykule chciałbym pokazać takie naturalne modyfikacje wspomnianego na początku zadania 4., przypomnijmy zatem jego treść:

Zadanie 0. (VIII OMG, zawody II stopnia)

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?

We wzorcowym rozwiązaniu (największa liczba kolorów to 3 i jest realizowana przez następujące kolorowanie: płaszczyzna za wyjątkiem pewnej prostej k ma pierwszy kolor, prosta k za wyjątkiem pewnego punktu P ma drugi kolor, a punkt P kolor trzeci) niektóre proste są dwukolorowe, a inne jednokolorowe. Nasuwa się więc następujące pytanie:

Zadanie 1.

Czy można tak pokolorować płaszczyznę trzema kolorami, by na każdej prostej występowały dokładnie dwa kolory?

Rozwiązanie

Wystarczy nieznacznie poprawić wspomniane wcześniej rozwiązanie – ponieważ proste jednokolorowe są równoległe do k, wystarczy dorysować kolejną prostą przechodzącą przez punkt P i poza tym punktem nadać jej kolor drugi (ten, co k).

Kolejna modyfikacja jest już odrobinę trudniejsza. Czemu bowiem ograniczać się do prostych dwukolorowych?

Zadanie 2.

Iloma kolorami można pokolorować płaszczyznę tak, aby każda prosta była co najwyżej trójkolorowa? Im więcej kolorów, tym lepsze rozwiązanie.

Rozwiązanie

Oczywiście, jeśli zastosujemy nie więcej, niż 3 kolory, to każda prosta będzie co najwyżej trójkolorowa – nie jest to jednak ciekawy przypadek. Spróbujmy wykorzystać 4 kolory: na płaszczyźnie koloru pierwszego namalujmy dwoma kolorami dwie przecinające się proste. Punkt ich przecięcia oznaczmy kolorem czwartym — w otrzymanym kolorowaniu każda prosta faktycznie jest co najwyżej trójkolorowa. Ponadto na każdej z tych prostych możemy jeszcze dołożyć po punkcie w dwóch nowych kolorach, wykorzystując w ten sposób już 6 kolorów.

Łatwo sprawdzić, że otrzymanej konfiguracji nie można powiększyć o dodatkowy kolor — gdziekolwiek nie namalowalibyśmy punktu w 7. kolorze, znajdziemy prostą pomalowaną na 4 kolory (warto sprawdzić, wykonując odpowiedni rysunek!).

W przytoczonym na początku artykule Wojciecha Guzickiego własność tę nazwano maksymalnością i w tym samym artykule pokazane zostało, że nie oznacza ona jeszcze tego, że nie można użyć większej liczby kolorów. Jest tak również i w tym przypadku — wystarczy zamiast przecinających się prostych wziąć dwie proste równoległe, a na każdej z nich dwa punkty w różnych kolorach i wówczas wykorzystamy aż 7 kolorów.

Czy jest to zatem najlepsze rozwiązanie naszego zadania? Nie, gdyż okazuje się, że możemy użyć nieskończenie wielu kolorów! Wystarczy pokolorować płaszczyznę na jeden kolor z wyjątkiem wybranego okręgu, którego każdy punkt malujemy na inny kolor. Łatwo sprawdzić, że wówczas każda prosta jest jednokolorowa, dwukolorowa lub trójkolorowa. Rodzi się zatem kolejne pytanie:

Zadanie 3.

Iloma kolorami można pokolorować płaszczyznę, by każda prosta była dokładnie trójkolorowa?

Nie posiadam pełnej odpowiedzi na to pytanie — potrafię to zrobić trzema kolorami, jednak być może istnieje rozwiązanie, wykorzystujące większą ich liczbę.

Z pewnością można sformułować jeszcze wiele pokrewnych problemów. Niektóre z nich mogą okazać się bardzo trudne, niewykluczone jednak, że już za progiem czai się ciekawa matematyka, która dopiero czeka na odkrycie. Tego typu modyfikacji można dokonywać praktycznie na każdym zadaniu, co sprawia, że uczeń nudzący się na lekcji matematyki „bo rozwiązał już wszystkie zadania” powinien spojrzeć na nie ponownie, gdyż z pewnością wciąż dają one pole do twórczych rozważań.

Adam Dzedzej

Bałtyk do Kwadratu

W dniach 7–11 listopada 2013 r. odbyły się w Rydze (na Łotwie) dwudzieste czwarte międzynarodowe zawody matematyczne *Baltic Way*. Polskę reprezentowali następujący uczniowie, wyłonieni na podstawie wyników LXIV Olimpiady Matematycznej (2012/2013):

- Stanisław Frejlak (XIV LO w Warszawie),
- Krzysztof Maziarz (I LO w Krośnie),
- Jan Mirkiewicz (Gimnazjum 49 we Wrocławiu),
- Ngoc Khanh Nguyen (XIV LO we Wrocławiu)
- Piotr Pawlak (Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna w Gdańsku)

Delegacji polskiej przewodniczyli Szymon Kanonowicz i Michał Miśkiewicz. Oprócz naszej drużyny w zawodach wzięły udział delegacje z następujących 10 nadbałtyckich państw: Danii, Estonii, Finlandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Rosji (tylko uczniowie z Sankt Petersburga), Szwecji oraz Islandii, która nad Bałtykiem nie leży, ale tradycyjnie jest zapraszana. Konkurs jak zwykle miał charakter drużynowy i polegał na rozwiązaniu przez poszczególne drużyny 20 zadań w czasie 4,5 godziny.

Za rozwiązanie każdego zadania można było otrzymać od 0 do 5 punktów. Trzy najlepsze wyniki były bardzo zbliżone. Zwyciężyli gospodarze, zdobywając 77 punktów, a tuż za nimi uplasowali się Rosjanie z Sankt Petersburga i Polacy z wynikiem 76 punktów. Następne miejsca zajęli Litwini i Niemcy, z wynikami odpowiednio 71 i 65 punktów.

Zgodnie z regulaminem konkursu, w przypadku remisu o kolejności decyduje liczba bezbłędnie rozwiązanych zadań. Tutaj reprezentanci Rosji okazali się lepsi, uzyskali trzynaście „piątek”, czyli o jedną więcej niż Polacy. Wobec tego zajęliśmy trzecie miejsce, tracąc zaledwie punkt do zwycięzców.

Zadania były dość trudne, zwycięzców dzieliły aż 23 punkty od maksymalnej liczby punktów. Ponadto wśród dwudziestu zadań były trzy, których żadna drużyna nie rozwiązała w pełni poprawnie i jedno, które poprawnie rozwiązała tylko jedna drużyna. Mowa tu o zadaniu trzecim, za które Polacy otrzymali 5 punktów, Niemcy i Norwedzy po jednym punkcie, a pozostałe drużyny nie zdobyły żadnego punktu. Było to zadanie algebraiczne; należało znaleźć wszystkie funkcje rzeczywiste f spełniające warunek

$$f(xf(y)+y)+f(-f(x))=f(yf(x)-y)+y$$

dla wszystkich par liczb rzeczywistych x, y.

Poza samymi zawodami, uczestnikom zapewniono bogaty program turystyczno-rozrywkowy, w ramach którego między innymi odwiedzili zamki w miejscowościach Turaida i Sigulda oraz uczestniczyli w wieczorze gier planszowych i logicznych.

Szymon Kanonowicz

Chochlik Olimpijski

Już drugi rok dokumentujemy działalność Chochlika Olimpijskiego — psotliwego demona odpowiedzialnego za „matematycznie nowatorskie” fragmenty prac uczestników OMG. Jego wybryki rzadko kiedy mają wpływ na ocenę rozwiązań, w znakomitej większości skutkują one jedynie szerokim uśmiechem na ustach osoby sprawdzającej konkretną pracę, stanowiąc bardzo miłe urozmaicenie procesu recenzowania rozwiązań.

Poniżej prezentujemy fragmenty, które cieszyły się największym uznaniem zespołu sprawdzającego prace zawodów II stopnia tegorocznej edycji OMG.

- *Wszystkie liczby są parzyste, nieparzyste albo x.*
- *Suma w rzędach będzie początkowo większa niż w wierszach, ale z czasem wiersze dogonią i przegonią rzędy.*
- *Możemy obrać 3 punkty tworzące trójkąt, a następnie powoli usuwać z niego punkty.*
- *Trójkąt nie może się zapadnąć.*
- *Między dwoma punktami zawsze jest odległość.*
- *Zacznę od tego, że narysuję niewidzialną linię, która łączy A i M.*
- *Łączę punkt B z E i wydłużam go.*
- *Obliczam dla przykładu 3×3, bo nie mam 81 liter.*
- *Każda z tych liczb jest złożona z siebie.*

Na wyróżnienie zasługują również cztery oryginalne sposoby rozwiązania zadania 3.

- *Pomimo usilnych prób zbudowania takiej tablicy poległem, więc stwierdzam, że jej zbudować nie można.*
- *Może się to zdarzyć, ale bardzo rzadko.*
- *Tak, może się to zdarzyć, wszystko zależy od zmyślności autora i od porządku w układaniu liczb, który wymyśli autor.*
- *Odpowiedź do tego zadania kryje się w interpretacji słów „w pewnym porządku”.*

W jednej z prac pojawiło się także zdanie:

- *W ostatnim rzędzie i kolumnie trafia się na martwy koniec.*

W tym momencie i my napotkaliśmy martwy koniec. Mamy nadzieję, Drogi Czytelniku, że podobnie jak i my traktujesz tę rubryczkę z przymrużeniem oka. Polecamy również odnoszenie się do przytoczonych cytatów z pewną dozą pokory — kto wie, może to Ty będziesz następną ofiarą Chochlika? ;)

Wszystkim uczestnikom OMG, ich nauczycielom oraz sympatykom Olimpiady życzymy przyjemnych wakacji!

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Liczby trójkątne i czworościenne

6. Dla każdego z kwadratów skorzystaj z zadania 2.

7. Wykorzystaj białą figurę z rysunku 5.

8. Ułóż obok siebie nie poszczególne liczby K_n po kolei, ale małe kwadratowe składniki każdej z nich — od najmniejszych do największych. Potem otrzymaną figurę spróbuj dopełnić do prostokąta.

9. Podobnie, jak w zadaniu 1., wykonaj odejmowanie geometrycznie. Następnie uzyskaną figurę podziel na prostokąty, z których wszystkie mają taki sam jeden z wymiarów i sklej je w jeden długi prostokąt. *Odpowiedź:* $ab(a+b+1)$.

10. Najpierw wykaż, że $T_n^2-T_{n-1}^2=n^3$. W dowodzie skorzystaj z zadania 2.

11. Zauważ, że sumę kolejnych dodatnich liczb całkowitych od k do m można wyrazić jako T_m-T_{k-1} (przyjmujemy $T_0=0$). Tę różnicę można przedstawić geometrycznie, a następnie dopełnić do prostokąta.

Kwadraty i dzielniki

9. *Sposób* I. Naśladuj rozwiązanie zadania 1: na mocy twierdzenia 1, szukana liczba jest kwadratem pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Ile dzielników może mieć liczba k?
Sposób II. Wykorzystaj twierdzenie 4 z tego numeru *Kwadratu* i postępuj podobnie, jak w rozwiązaniu zadania 14.
Odpowiedź: Szukane liczby to czwarte potęgi liczb pierwszych.

10. Nie może. Rozważ liczby 6 i 8.

11. Nie istnieje. Każda liczba opisanej postaci dzieli się przez 5, ale nie przez 25.

12. Nie istnieje. Każda liczba opisanej postaci dzieli się przez 4, ale nie przez 8.

13. Skorzystaj z twierdzenia 3 i przeprowadź rozumowanie podobne do dowodu faktu o niewymierności liczby $\sqrt{2}$.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 5000 egz.