Figury z obrotami o kąt $90°$

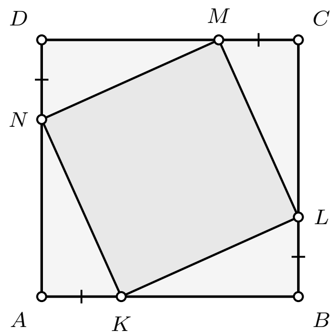
Seminarium olimpijskie — Paweł Kwiatkowski

Obrotem wokół punktu O o kąt α nazywamy przekształcenie, które punktowi X przyporządkowuje taki punkt X', że $OX = OX'$ oraz $\measuredangle XOX' = \alpha$.

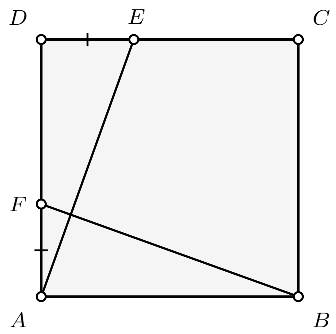
Punkt X' będziemy nazywać obrazem punktu X w tym przekształceniu; powiemy też, że punkt X przechodzi na punkt X'.

Jeśli w tym samym obrocie również pewien punkt Y przejdzie na punkt Y', to $X'Y' = XY$, a kąt między prostymi $X'Y'$ i XY jest równy α.

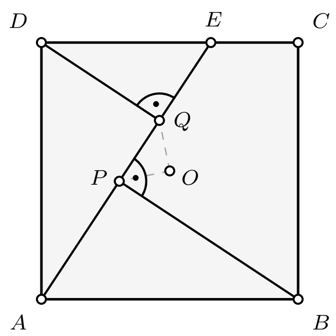
1. Na bokach AB, BC, CD i DA kwadratu $ABCD$ wybrano punkty odpowiednio K, L, M oraz N tak, że $AK = BL = CM = DN$. Wykaż, że czworokąt $KLMN$ jest kwadratem.



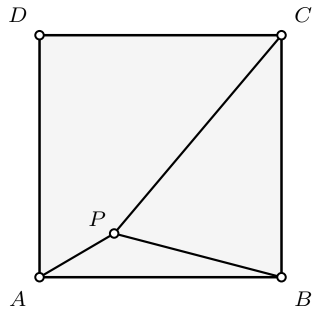
2. Punkty E i F leżą na bokach odpowiednio CD i DA kwadratu $ABCD$, przy czym $DE = AF$. Wykaż, że proste AE i BF są prostopadłe.



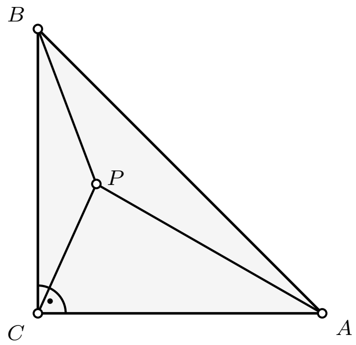
3. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt O jest jego środkiem. Punkt E należy do boku CD. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktów B i D na prostą AE. Udowodnij, że trójkąt OPQ jest prostokątny i równoramienny.



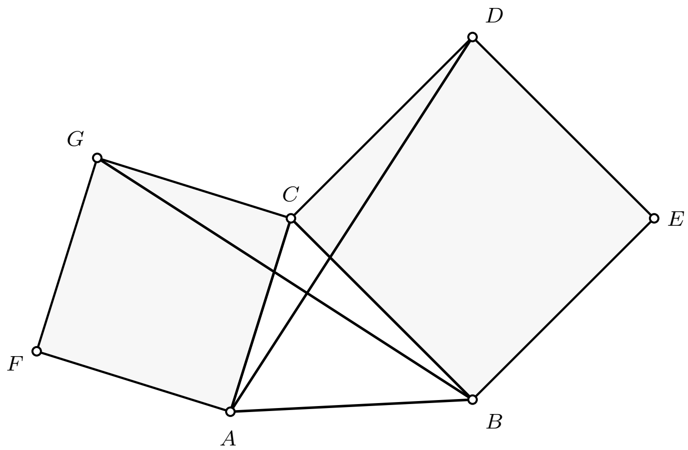
4. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ leży taki punkt P, że $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. Ile stopni ma kąt APB?



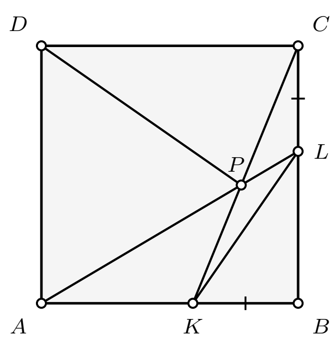
5. Trójkąt równoramienny ABC ma kąt prosty przy wierzchołku C. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki $PA = 11$, $PB = 7$ oraz $PC = 6$. Oblicz kwadrat długości przyprostokątnej tego trójkąta.



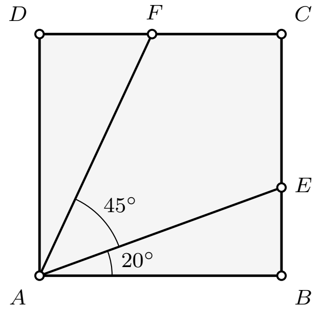
6. Na bokach BC i AC trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $BCDE$ oraz $CAFG$. Wykaż, że odcinki AD i BG są prostopadłe i mają tę samą długość.



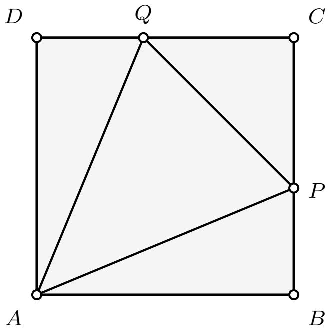
7. Na boku AB kwadratu $ABCD$ wybrano punkt K, a na boku BC punkt L, tak że $KB = LC$. Odcinki AL i CK przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że odcinki DP i KL są prostopadłe.



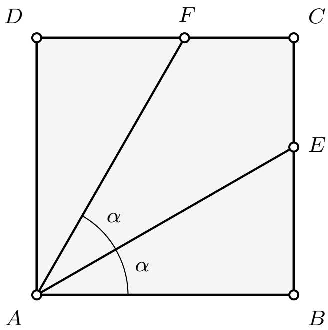
8. (XLIII OM-I-z2) W kwadracie $ABCD$ o boku długości 1 punkt E leży na boku BC, punkt F leży na boku CD, a miary kątów EAB i EAF wynoszą odpowiednio $20°$ i $45°$. Oblicz wysokość trójkąta AEF poprowadzoną z wierzchołka A.



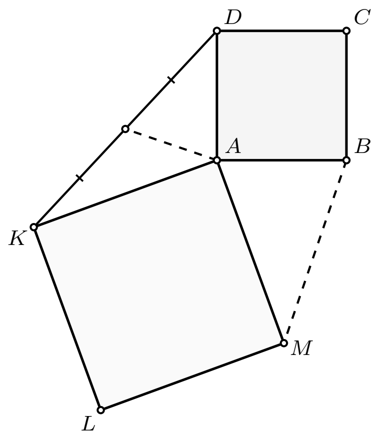
9. Punkty P i Q leżą na bokach odpowiednio BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym zachodzi równość $BP + DQ = PQ$. Udowodnij, że $\measuredangle QAP = 45°$.



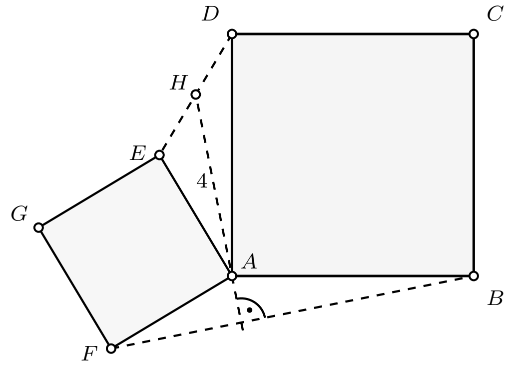
10. W kwadracie $ABCD$ na bokach BC i CD wybrano punkty odpowiednio E i F tak, że $\measuredangle EAB = \measuredangle EAF$. Wykaż, że $BE + DF = AF$.



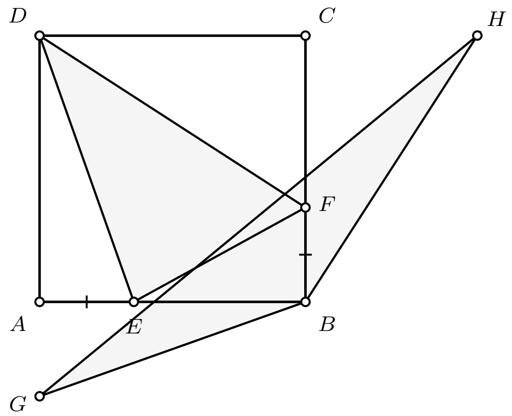
11. Dane są kwadraty $ABCD$ oraz $AKLM$ o rozłącznych wnętrzach. Wykaż, że środkowa trójkąta DAK poprowadzona z punktu A jest prostopadła do prostej BM.



12. Dane są kwadraty $ABCD$ i $AEGF$ o rozłącznych wnętrzach. Niech H będzie takim punktem na odcinku ED, że prosta AH jest prostopadła do prostej FB. Załóżmy przy tym, że $AH = 4$. Wyznacz długość odcinka BF.



13. W kwadracie $ABCD$ zaznaczono punkty E i F na bokach odpowiednio AB i BC tak, że $AE = BF$. Punkt G jest symetryczny do punktu F względem środka boku AB, a punkt H jest symetryczny do punktu E względem środka boku BC. Wykaż, że trójkąty DEF i BGH mają równe pola.



14. *Twierdzenie van Aubela dla czworokąta*

Dany jest czworokąt $ABCD$. Na każdym z jego boków, po zewnętrznej stronie, zbudowano kwadraty $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$ oraz $DAKL$, o środkach odpowiednio M, N, O i P. Wykaż, że odcinki OM i NP są prostopadłe i mają tę samą długość.