STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Treści zadań Obozu Naukowego OMG

Poziom OM

2015 rok

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

SZCZYRK 2015

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Dwusieczna kąta ACB przecina prostą przechodzącą przez punkt A i równoległą do boku BC w punkcie P, a prostą przechodzącą przez punkt B i równoległą do boku AC w punkcie Q. Wykaż, że $AQ = BP$.

2. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite m o następującej własności: Dla każdej liczby całkowitej n spełniającej warunek

$$n^2 \equiv 1 \pmod{m}$$

zachodzi

$$n \equiv \pm 1 \pmod{m}.$$

3. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: Dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c, d o iloczynie $abcd$ podzielnym przez n^3, co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest podzielna przez n.

4. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg, przy czym $AB = BC$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P, a odcinki BD i CE przecinają się w punkcie Q. Udowodnij, że proste AC i PQ są równoległe.

5. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste C, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$C\,(xy + yz + zx) \leqslant x^2 + y^2 + z^2.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x < y$ zachodzą nierówności

$$\frac{(y-x)\cdot \sqrt[n]{y}}{ny} < \sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x} < \frac{(y-x)\cdot \sqrt[n]{x}}{nx}.$$

7. Rozstrzygnij, czy istnieje wielościan wypukły, w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi i który posiada przekrój płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołki, będący wielokątem o nieparzystej liczbie boków.

8. Kwadrat o wymiarach 100×100 podzielono na $10\,000$ kwadratów jednostkowych, a następnie w każdym z czterech naroży usunięto kwadrat jednostkowy. Z tak powstałej figury o 9996 kwadratowych polach chcemy wyciąć jak najwięcej prostokątów o wymiarach 1×3 — tnąc tylko po liniach dotychczasowego podziału, aby każdy prostokąt składał się z trzech pól. Wyznacz największą liczbę prostokątów, jakie można wyciąć w ten sposób.

Drugie zawody indywidualne

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $12^n - 25$ jest złożona.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AC < BC$. Punkt M jest środkiem tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, do którego należy punkt C, a punkt O jest środkiem tego okręgu. Okrąg opisany na trójkącie CMO przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach K i L różnych od C. Punkty P i Q są rzutami odpowiednio punktów K i L na prostą AB. Wykaż, że $AB = 2PQ$.

11. Rozstrzygnij, czy istnieją dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniające równość

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^k \cdot \left(3+\sqrt{5}\right)^m = \left(1+\sqrt{5}\right)^n.$$

12. Dodatnie liczby niewymierne α i β spełniają równość

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + 1.$$

Zdefiniujmy $a_n = [n \cdot \alpha]$ oraz $b_n = [n \cdot \beta]$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Udowodnij, że każda nieujemna liczba całkowita występuje w ciągu (a_n) o jeden raz więcej niż w ciągu (b_n).

Uwaga: $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Trzecie zawody indywidualne

13. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Styczna w punkcie A do okręgu o_1 przecina okrąg o_2 w punkcie D, a styczna w punkcie A do okręgu o_2 przecina okrąg o_1 w punkcie E, przy czym punkty D i E są różne od A oraz kąt DAE jest ostry. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ADE w punktach D i E przecinają się w punkcie C. Wykaż, że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.

14. Dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają równość

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n.$$

Udowodnij, że

$$\frac{a_1^{11}}{a_2^7} + \frac{a_2^{11}}{a_3^7} + \frac{a_3^{11}}{a_4^7} + \ldots + \frac{a_{n-1}^{11}}{a_n^7} + \frac{a_n^{11}}{a_1^7} \geqslant n.$$

15. Udowodnij, że istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma dzielnik pierwszy mniejszy od 60.

16. Punkt D należy do boku BC trójkąta równobocznego ABC, przy czym liczba $BD/CD=a$ jest wymierna. Z wierzchołka A w kierunku punktu D wypuszczono wiązkę lasera, która odbijała się od boków trójkąta zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Udowodnij, że po nieparzystej liczbie odbić wiązka trafiła do pewnego wierzchołka trójkąta ABC i wyznacz ten wierzchołek w zależności od a.

Czwarte zawody indywidualne

17. Każde dwa wierzchołki 13-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Czy stąd wynika, że pewne trzy wierzchołki danego wielokąta wyznaczają trójkąt o bokach tego samego koloru? Odpowiedź uzasadnij.

18. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Czy stąd wynika, że pewne trzy wierzchołki danego wielokąta wyznaczają trójkąt o bokach tego samego koloru? Odpowiedź uzasadnij.

19. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ o wszystkich bokach równej długości, w którym $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE = 180°$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że odcinek CP ma tę samą długość, co każdy z boków pięciokąta $ABCDE$.

20. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorami

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{\left[\frac{n}{2}\right]} \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Udowodnij, że w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 7.

Uwaga: $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Mecz matematyczny

21. Dana jest liczba naturalna n oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Udowodnij, że $S_3 \cdot S_5 \leqslant S_2 \cdot S_6$, gdzie $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k$.

22. Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O oraz punkt A leżący na zewnątrz tego okręgu. Z punktu A poprowadzono styczne do okręgu ω w punktach K i L. Punkt M jest środkiem odcinka KL. Okrąg o przechodzi przez punkty O i M oraz przecina okrąg ω w różnych punktach B i C. Wykaż, że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.

23. W sześcianie o krawędzi 7 umieszczono 6 sześcianów o krawędzi 1 (niekoniecznie rozłącznych). Udowodnij, że w dużym sześcianie można umieścić kulę o promieniu 1 rozłączną ze wszystkimi sześcioma małymi sześcianami.
Uwaga: Przyjmujemy, że sześcian i kula zawierają punkty leżące na ich brzegu.

24. Każde dwa wierzchołki 1001-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Udowodnij, że można tak wybrać 11 wierzchołków tego 1001-kąta, aby wyznaczony przez nie 11-kąt wypukły miał co najmniej 10 boków tego samego koloru.

25. Dany jest trójkąt równoboczny ABC, którego środkiem ciężkości jest punkt S. Prosta l przechodzi przez punkt S i przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Punkt P spełnia warunki $AL=PL$ oraz $BK=PK$. Udowodnij, że odległość punktu P od prostej l nie zależy od wyboru prostej l.

26. Liczby rzeczywiste a, b, c, d, e spełniają równości

$$a=2c^2-1, \qquad b=2a^2-1, \qquad c=2b^2-1,$$
$$c=4e^3-3e, \quad d=4c^3-3c, \quad e=4d^3-3d.$$

Czy stąd wynika, że $a=b=c=d=e=1$?

27. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba naturalna $n>2$, że

$$n^{n^n} \equiv 16 \pmod{p}.$$

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

28. Dany jest różnoboczny trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg o. Proste zawierające środkowe AD, BE, CF tego trójkąta przecinają okrąg o odpowiednio w punktach K, L, M różnych od A, B, C. Prosta przechodząca przez A i równoległa do BC przecina okrąg o w punkcie P. Analogicznie dla punktów B i C definiujemy odpowiednio punkty Q i R. Wykaż, że proste KP, LQ, MR przecinają się w jednym punkcie.

29. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a_1^{16}+a_2^{16}+a_3^{16}+\ldots+a_{61}^{16}=62\cdot a_{62}^{16}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a_1, a_2, $\ldots$, a_{62}.

30. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^8+b^{48}+c^{49}+d^{120}+e^{121}=f^8$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d, e, f spełniających warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c,d,e,f)=1$.

31. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ punkty K, L, M, N, O, P są środkami odpowiednio przekątnych AC, BD, CE, DF, EA, FB. Wyznacz stosunek pola sześciokąta $KLMNOP$ do pola sześciokąta $ABCDEF$.