I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody trzeciego stopnia)
25 marca 2006 r.

1. Ile jest czwórek (a,b,c,d) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie: $ab+bc+cd+da=55$? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E należy do boku AB, a punkt F do boku AD. Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P, a prostą CD w punkcie Q. Wykaż, że pole trójkąta CEF jest równe polu trójkąta APQ.

3. W przestrzeni danych jest takich n punktów $(n \geqslant 4)$, że żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Udowodnij, że można tak wybrać jeden z tych kolorów, aby każde dwa punkty były połączone odcinkiem lub łamaną wybranego koloru.

4. Dany jest taki czworościan, że każdy kąt dwuścienny wyznaczony przez jego sąsiednie ściany jest ostry lub prosty. Wierzchołki tego czworościanu leżą na sferze o środku S. Czy punkt S może leżeć na zewnątrz tego wielościanu? Odpowiedź uzasadnij.

5. Dane są różne liczby pierwsze p, q oraz takie dodatnie liczby całkowite a, b, że liczba aq daje resztę 1 przy dzieleniu przez p, a liczba bp daje resztę 1 przy dzieleniu przez q. Wykaż, że

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}>1.$$