III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
Zawody stopnia pierwszego
(10 września 2007 r. – 29 października 2007 r.)

1. Rozwiąż równanie: $\Big|\big|\,||x-1|-2|-3\big|-4\Big| = 0$.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A, punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B, punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C, punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D. Oblicz pole czworokąta $KLMN$.

3. Liczby a, b, c są dodatnie. Wykaż, że
$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}<1\,.$$

4. Dana jest liczba ośmiocyfrowa a. Liczba ośmiocyfrowa b powstaje z liczby a poprzez przestawienie cyfry jedności liczby a na początek. Wykaż, że jeśli liczba a jest podzielna przez 101, to liczba b jest także podzielna przez 101.

5. Okrąg o promieniu 1 jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$. Okrąg ten jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wiadomo, że
$$\sphericalangle KLM = 4\sphericalangle AKN \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle KNM = 4\sphericalangle BKL\,.$$
Oblicz długość odcinka LN.

6. Ile jest liczb 15-cyfrowych k o następującej własności: *Każde trzy kolejne cyfry liczby k są różne oraz w każdej trójce kolejnych cyfr liczby k występuje* 0? Odpowiedź uzasadnij.

7. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny oraz taka płaszczyzna przecinająca wszystkie jego krawędzie boczne, że pole uzyskanego przekroju jest większe od pola podstawy ostrosłupa? Odpowiedź uzasadnij.