Treści zadań (poziom OMG)

Pierwsze zawody indywidualne

1. Rozwiąż w dodatnich liczbach rzeczywistych x równanie
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+17}+\sqrt{x+28}=18.$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność
$$7a(b+c)\leqslant 5\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

3. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, liczba
$$\frac{(4n)!\cdot(n!)^2}{((2n)!)^3}$$
zapisana w postaci ułamka nieskracalnego ma nieparzysty licznik i nieparzysty mianownik.

4. Liczby całkowite $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{15}, m$ spełniają równanie
$$n_1^4+n_2^4+n_3^4+\ldots+n_{15}^4=m^4.$$
Udowodnij, że wśród tych liczb co najwyżej dwie są nieparzyste.

5. W okrąg o promieniu 1 wpisano 666-kąt foremny. Wyznacz najmniejszą liczbę k o następującej własności: wśród dowolnie wybranych k wierzchołków tego wielokąta istnieją dwa wierzchołki odległe o 1.

6. Okręgi o_1 i o_2 są wpisane w kąty wierzchołkowe o wierzchołku A, wyznaczone przez proste k i l. Prosta k jest styczna do okręgu o_1 w punkcie K, a prosta l jest styczna do okręgu o_2 w punkcie L. Okręgi o_1 i o_2 leżą po tej samej stronie prostej m, która jest do nich styczna i przecina proste k i l odpowiednio w punktach B i C. Udowodnij, że $AK+AL=BC$.

7. Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB. Prosta prostopadła do boku AC przechodząca przez punkt A przecina prostą BC w punkcie D. Punkt E spełnia warunki:
$$\sphericalangle ECB=\sphericalangle EBA=90^\circ.$$
Punkt F leży na prostej AB, przy czym $BF=AD$, a punkt B leży na odcinku AF. Udowodnij, że $ED=EF$.

8. Równoległobok $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Kąty nachylenia ścian bocznych do podstawy są równe. Udowodnij, że równoległobok $ABCD$ jest rombem.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Drugie zawody indywidualne

9. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} ab+a+b=1 \\ bc+b+c=5 \\ ca+c+a=5 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych a, b, c.

10. Dana jest szachownica o wymiarach 2014×2014. Czy można tak ją pokryć kostkami domina, aby liczba kostek ułożonych poziomo była równa liczbie kostek ułożonych pionowo?

Uwaga: Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

11. Wykaż, że istnieje taka liczba naturalna k większa od 1, że równanie

$$n^{n^k}=m^m$$

ma co najmniej cztery rozwiązania w dodatnich liczbach całkowitych m, n.

Uwaga: Potęgowanie wykonuje się „od góry", tzn. $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

12. Trójkąt ABC jest opisany na okręgu o środku I. Punkt H jest ortocentrum tego trójkąta. Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC, a punkt M jest środkiem tego łuku AC okręgu o, do którego nie należy punkt B. Ponadto spełniony jest warunek $MI=MH$. Wyznacz miarę kąta $\sphericalangle ABC$.

Trzecie zawody indywidualne

13. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n, że sumy cyfr liczb m^{2013} oraz n^{2013} różnią się o 2013.

14. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na odcinkach AP, BP, CP i spełniają warunki:

$$\frac{AX}{XP}=\frac{BY}{YP}=\frac{CZ}{ZP}.$$

Punkty K, L, M są środkami odpowiednio odcinków BC, CA, AB. Udowodnij, że proste XK, YL, ZM przecinają się w jednym punkcie.

15. Danych jest $2^{2013}+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych nie większych od $2^{4023}+1$. Udowodnij, że spośród nich można wybrać takich sześć różnych liczb a, b, c, d, e, f, że

$$a+b=c+d=e+f.$$

16. Czy istnieje wielościan o nieparzystej liczbie ścian, którego wszystkie ściany są trójkątami?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Czwarte zawody indywidualne

17. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że

$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

18. Szachownicę o wymiarach 14×14 pokryto 98 kostkami domina. Udowodnij, że istnieje taka prosta równoległa do pewnych dwóch boków szachownicy i przechodząca przez jej wnętrze, która rozcina co najwyżej dwie kostki.

Uwaga: Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

19. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg o środku O. Przekątne tego czworokąta przecinają się w punkcie M, a odcinki łączące środki jego przeciwległych boków przecinają się w punkcie N. Udowodnij, że $OM\geqslant ON$.

20. Wykaż, że równanie

$$2x^2+5y^2=z^2$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z.

21. Dany jest czworościan foremny o krawędzi 1. Punkt P należy do wnętrza tego czworościanu. Suma odległości punktu P od krawędzi tego czworościanu jest równa s. Wykaż, że $s\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Mecz matematyczny

22. Czy liczba $7+5\sqrt{2}$ jest sumą liczb postaci $\left(x+y\sqrt{2}\right)^2$, gdzie x, y są liczbami wymiernymi?

23. Okręgi o, p mają różne promienie i przecinają się w punktach A i B. Prosta k jest styczna do okręgów o i p odpowiednio w punktach M i N, a prosta l jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach O i P. Wykaż, że ortocentra trójkątów MNA, MNB, OPA i OPB są wierzchołkami prostokąta.

24. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi nierówność

$$\frac{m^m}{m!}\cdot\frac{n^n}{n!}<\frac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}.$$

25. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykaż, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABC, BCD, CDA i DAB są wierzchołkami prostokąta.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

26. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}+\frac{a^2+c^2}{d+b}+\frac{a^2+d^2}{b+c}\geqslant 3a.$$

27. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się mniej niż $n/4$ zerami.

28. Na każdym polu szachownicy o wymiarach 2013×2013 znajduje się żarówka. Dla każdego rzędu poziomego, pionowego i ukośnego dysponujemy przełącznikiem, który zmienia stan (zgaszona/zapalona) wszystkich żarówek w tym rzędzie. Rząd ukośny tworzą pola, których środki leżą na prostej przecinającej boki szachownicy pod kątem $45°$. W szczególności rzędem jest pojedyncza żarówka w polu narożnym.

Początkowo zapalona jest żarówka w centralnym polu szachownicy, a pozostałe żarówki są zgaszone. Czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone?

29. Czy istnieje liczba naturalna większa od 1, którą można przedstawić w postaci n^{n^k}, gdzie n, k są dodatnimi liczbami całkowitymi, na co najmniej 2013 sposobów?

30. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Na bokach tego czworokąta budujemy na zewnątrz takie prostokąty $ABLK$, $BCNM$, $CDPO$ i $DARQ$, aby $BC=AR$, $CD=BL$, $DA=CN$, $AB=DP$. Udowodnij, że środki tych prostokątów są wierzchołkami prostokąta.

31. Na stosie leży 2013 kamieni. Ruch polega na wykonaniu jednej z następujących operacji:

• rozdzielenie dowolnego stosu zawierającego co najmniej dwa kamienie na dwa niepuste stosy,

• przełożenie jednego kamienia z większego stosu na mniejszy, pod warunkiem, że przed wykonaniem ruchu liczby kamieni w tych stosach różniły się o więcej niż 1.

Czy zgodnie z powyższymi regułami można wykonać ciąg trzech milionów ruchów?

32. W czworościanie $ABCD$ punkty K i L są środkami odpowiednio krawędzi AB i CD. Płaszczyzna p przechodzi przez punkty K i L oraz przecina krawędzie BC i AD tego czworościanu odpowiednio w punktach E i F. Wykaż, że środek odcinka EF leży na prostej KL.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego