

XIX OMJ – Seminarium dla nauczycieli

Zbigniew Karczmarczyk zbylut1@gazeta.pl

Podzielność przez 3.

1. Wykaż, że jeżeli liczby n i $n^2 + 2$ są pierwsze, to liczba $n^3 + 2$ też jest pierwsza.
2. Wykaż, że jeżeli liczby całkowite dodatnie a, b, c są długościami boków trójkąta prostokątnego, to przynajmniej jedna z nich jest podzielna przez 3.
3. Wykaż, że spośród każdych pięciu liczb całkowitych można wybrać trzy, których suma jest podzielna przez 3.
4. Karol oblicza sumę, różnicę i iloczyn pewnych dwóch dodatnich liczb całkowitych. Czy może się zdarzyć, że żaden z tych wyników nie będzie podzielny przez 3?
5. Karolina oblicza sumę $a + b + c$ i różnice $a - b, b - c, a - c$, gdzie a, b, c są trzema dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $a \geq b \geq c$. Czy może się zdarzyć, że żaden z tych wyników nie będzie podzielny przez 3?
6. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $2^p + p^2$ jest liczbą pierwszą.
7. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n , dla których liczba $2^n + n$ jest liczbą złożoną.
8. Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej p liczba $2^p + 3^p$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.
9. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 3.
10. Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej p , większej od 3, liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.
11. Wyznacz wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych spełniających równanie $p + q = (p - q)^3$.
12. Wykaż, że suma kwadratów dwóch liczb całkowitych jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych liczb jest podzielna przez 3.
13. Wykaż, że jeżeli liczba całkowita podzielna przez 3 jest sumą pięciu kwadratów liczb całkowitych, to co najmniej dwa z tych kwadratów są podzielne przez 9.
14. Czy liczba $2023^{2024} + 2024^{2025}$ jest podzielna przez 3?
15. Wyznacz wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich takich, że liczba $a + b$ jest pierwsza oraz liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 3.
16. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których obie liczby $n^2 + n + 1$ i $n^2 + n + 3$ są pierwsze.
17. Załóżmy, że $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej dodatniej n . Czy istnieją liczby całkowite dodatnie n , dla których $n + S(n) + S(S(n)) = 2024$?

XIX OMJ – Seminarium dla nauczycieli

Zbigniew Karczmarczyk zbylut1@gazeta.pl

Podzielność przez 3.

18. Rozwiąż równania w zbiorze liczb całkowitych:

a) $x^2 + y^2 = 3z^2$,

b) $x^2 - 6x - 12y = 2$,

c) $15x^2 - 7y^2 = 9$,

d) $x^2 - 2022y = 2024$,

19. Czy istnieją liczby całkowite dodatnie x i y spełniające równanie

$$(x + 2y) \cdot (2x + y) = 2024^{2024} ?$$

20. Czy istnieją liczby całkowite dodatnie x i y takie, że każda z liczb

$x + y$, $x + 2y$, $2x + y$ jest kwadratem liczby całkowitej?

21. Wyznacz wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych spełniających równanie

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2$$

22. Każda spośród pewnych 2023 liczb naturalnych ma w zapisie dziesiętnym 10 jedynek, 20 dwójek i pewną liczbę zer. Wykaż, że tych liczb nie można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, żeby iloczyn liczb z pierwszej grupy był równy iloczynowi liczb z drugiej grupy.

23. Rozwiąż równania w liczbach całkowitych dodatnich:

a) $3^x + 4^y = 5^z$,

b) $3x^2 - 4y^2 = 13$.

24. Liczby pierwsze p, q, r, s spełniają warunki $p > q > r > s$ oraz

$p - q = q - r = r - s$. Wykaż, że liczba $p - s$ jest podzielna przez 18.