

## Reszty z dzielenia

### Zapis algebraiczny

**Zadanie 1.** *Czy istnieje taka liczba naturalna, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, a przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2?*

**Zadanie 2.** *Czy suma 48 kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 48?*

**Zadanie 3.** *Przy dzieleniu liczb naturalnych  $a, b, c$  przez 5 otrzymujemy odpowiednio reszty 1, 2, 3. Wyznacz resztę z dzielenia przez 5 sumy kwadratów liczb  $a, b, c$ .*

**Zadanie 4.** *Udowodnij, że kwadrat dowolnej liczby naturalnej daje przy dzieleniu przez 3 reszty 0 lub 1.*

**Zadanie 5.** *Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczby  $12n + 1$  oraz  $30n + 1$  są względnie pierwsze.*

### Niezmienniki

**Zadanie 6.** *Na tablicy zapisano dziesięć znaków „+” i piętnaście znaków „-”. W jednym ruchu ścieramy dwa dowolne znaki i zapisujemy na tablicy „+”, jeśli znaki były takie same, oraz „-”, jeśli były różne. Po 24 ruchach na tablicy zostaje jeden znak. Jaki?*

**Zadanie 7.** *Na wyspie Mua żyją trzy rodzaje kameleonów: błękitne, granatowe i purpurowe. Po spotkaniu się dwóch osobników tego samego koloru nie dzieje się nic. Spotkanie dwóch osobników różnych kolorów powoduje zmianę koloru na ten trzeci. Na wyspie żyje 56 kameleonów błękitnych, 34 granatowe i 66 purpurowych. Czy jest możliwe, że w pewnym momencie na wyspie będą kameleony tylko jednego koloru?*

**Zadanie 8.** *Wierzchołki siedmiokąta foremnego pokolorowane są na czerwono, niebiesko i zielono. Dysponujemy następującą operacją zmiany koloru: jeśli pewne dwa sąsiednie wierzchołki siedmiokąta są różnych kolorów, możemy zamienić ich kolor na ten sam – różny jednak od tego, którym były pokolorowane. Pokaż, że jesteśmy w stanie za pomocą pewnej liczby powyższych operacji zmienić kolory wszystkich wierzchołków siedmiokąta na jednakowy kolor. Czy możemy określić ten jednakowy kolor bez wykonywania opisanych wyżej operacji?*

**Zadanie 9.** *Kasia wpisała liczby  $1, 2, 3, \dots, 9$  do tabelki rozmiarów  $3 \times 3$  złożonej z dziewięciu pól, umieszczając w każdym polu inną liczbę. Następnie wykonała serię operacji polegających na wyborze dowolnego kwadratu  $2 \times 2$  w tabelce i zwiększeniu lub zmniejszeniu o 1 wszystkich liczb wpisanych w pola tego kwadratu. Czy po wykonaniu pewnej liczby opisanych operacji możliwe jest, aby wszystkie liczby w tabelce  $3 \times 3$  były równe 11?*

**Zadanie 10.** *Pola szachownicy rozmiaru  $10 \times 10$  wypełniono liczbami naturalnymi od 1 do 100, przy czym w każde pole wpisano inną liczbę. Powiemy, że dwa pola szachownicy są sąsiadujące, jeżeli posiadają wspólny bok lub wspólny wierzchołek. Wykaż, że suma liczb wpisanych w pewną parę sąsiadujących pól jest podzielna przez 4.*

## Reszty z dzielenia sum oraz iloczynów

- Zadanie 11.** *Uzasadnij, że liczba  $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022}$  nie jest podzielna przez 10.*
- Zadanie 12.** *Wykaż, że spośród pięciu dowolnych liczb naturalnych można wskazać trzy o sumie podzielnej przez 3.*
- Zadanie 13.** *Danych jest 111 liczb naturalnych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.*
- Zadanie 14.** *Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.*
- Zadanie 15.** *Wykaż, że co najmniej jedna z liczb naturalnych  $a, b, a + b$  jest liczbą nieparzystą lub jest podzielna przez 4.*
- Zadanie 16.** *Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $n(n^2 + 5)$  jest podzielna przez 6.*
- Zadanie 17.** *Wykaż, że równanie  $15x^2 - 7y^2 = 1$  nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.*
- Zadanie 18.** *Niech  $p > 3$  będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że liczba  $p^2 - 1$  jest podzielna przez 24.*
- Zadanie 19.** *Liczby pierwsze  $a, b, c$  są większe od 3. Wykaż, że liczba  $(a - b)(b - c)(c - a)$  jest podzielna przez 48.*
- Zadanie 20.** *Wykaż, że nie istnieje taka liczba naturalna  $n > 1$ , że liczba  $2^n$  jest dzielnikiem liczby  $3^n + 1$ .*
- Zadanie 21.** *Danych jest sześć kolejnych liczb naturalnych, przy czym najmniejsza z nich nie jest podzielna przez 5. Czy można wskazać w tym zbiorze trzy liczby takie, że ich iloczyn równy jest iloczynowi pozostałych trzech?*

## Literatura

1. J. Bednarczuk, J. Bednarczuk, *Matematyczne gwiazdki*, Wydawnictwo „Aksjomat” 2019.
2. Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Koło matematyczne w gimnazjum*, Wydawnictwo „Aksjomat” 2010.
3. Ł. Bożyk, *Kwadraty, liczby pierwsze i reszta*, Gazetka OMJ „Kwadrat” nr 7, <https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-07-kolor.pdf>.
4. B. Bzdęga, *Gdy zadaniu nie podłazysz, to załatwi je niezmiennik*, czasopismo „Delta”, sierpień 2019, <http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/2019/07/31/2019-08-delta-kpo.pdf>.
5. P. Domagalska, *Metoda niezmienników i półniezmienników*, Konferencja SEM 2009, <https://www.mimuw.edu.pl/~sem/konferencja-2009/materialy/domagalska.pdf>.
6. J. Jaszńska, *Szufladki i reszty z dzielenia*, Gazetka OMJ „Kwadrat” nr 6, <https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-06-kolor.pdf>.