II Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zawody drużynowe

(15 maja 2013 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, dla których istnieje dodatnia liczba naturalna n o tej własności, że liczba n^2+n+1 jest wielokrotnością liczby p.

Szkic rozwiązania

Niech P oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych o danej własności. Zauważmy, że zbiór P jest niepusty. Jego elementem jest na przykład liczba 3, gdyż $3 \mid 1^2+1+1$.

Przypuśćmy, że zbiór P jest skończony i należy do niego dokładnie k liczb pierwszych: $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Przyjmijmy $n=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. oraz niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby n^2+n+1.

Wówczas liczba pierwsza p spełnia warunki zadania, więc należy do zbioru P. Z drugiej zaś strony, liczba n^2+n+1 nie jest podzielna przez żadną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ze zbioru P, a zatem liczba p nie należy do zbioru P. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że zbiór P zawiera nieskończenie wiele elementów.,

---

2. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że suma trzech największych dzielników liczby n jest równa 1457.

Szkic rozwiązania

Ponieważ szukana liczba ma co najmniej trzy dzielniki, więc nie jest to liczba pierwsza. Oznaczmy przez p najmniejszy dzielnik pierwszy liczby n. Rozważymy dwa przypadki.

(a) Trzy najmniejsze dzielniki liczby n to 1, p i p^2. Wówczas trzy największe dzielniki liczby n to liczby n, $\frac{n}{p}$ oraz $\frac{n}{p^2}$. Wobec tego

$$n+\frac{n}{p}+\frac{n}{p^2}=1457,$$

a zatem

$$n=\frac{1457p^2}{p^2+p+1}.$$

Ponieważ liczby p^2 oraz p^2+p+1 są względnie pierwsze, więc $p^2+p+1 \mid 1457$.

Liczba 1457 ma trzy dzielniki większe od 1. Są to liczby 31, 47 oraz 1457. Jedyną liczbą naturalną spełniającą równość $p^2+p+1=31$ jest $p=5$; otrzymujemy wtedy $n=1175$. Z kolei równania $p^2+p+1=47$ oraz $p^2+p+1=1457$ nie mają rozwiązań w liczbach naturalnych.

(b) Trzy najmniejsze dzielniki liczby n to 1, p i q, gdzie $q>p$ jest liczbą pierwszą. Wówczas trzy największe dzielniki liczby n to liczby n, $\frac{n}{p}$ oraz $\frac{n}{q}$. Wobec tego

$$n+\frac{n}{p}+\frac{n}{q}=1457,$$

a zatem

$$n=\frac{1457pq}{pq+p+q}.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ponieważ liczby pq oraz $pq+p+q$ są względnie pierwsze, więc $pq+p+q \mid 1457$. Stąd wynika, że liczba $pq+p+q$ jest równa 31, 47 lub 1457, a zatem liczba $pq+p+q+1=(p+1)(q+1)$ wynosi 32, 48 lub 1458.

Istnieje jedna para $(p,q)=(3,7)$ liczb pierwszych spełniająca równość $(p+1)(q+1)=32$. Stąd otrzymujemy $n=987$. Ponadto istnieją dwie pary $(p,q)=(3,7)$ oraz $(p,q)=(5,7)$ liczb pierwszych spełniające równość $(p+1)(q+1)=48$. Wówczas uzyskujemy odpowiednio $n=987$ lub $n=1085$. Z kolei równanie $(p+1)(q+1)=1458$ nie ma rozwiązań w liczbach pierwszych.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczby 987, 1023, 1085 oraz 1175 spełniają warunki zadania. Są to jedyne liczby o żądanej własności.

---

3. W pewnej grupie jest $n \geqslant 5$ osób, przy czym każde dwie osoby, które się nie znają, mają dokładnie jednego wspólnego znajomego oraz żadna osoba nie zna wszystkich pozostałych. Udowodnij, że można 5 spośród danych n osób usadzić przy okrągłym stole tak, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi

(a) znajomymi,
(b) nieznajomymi.

Szkic rozwiązania

Niech A będzie osobą o największej liczbie znajomych. Oznaczmy przez B osobę, której A nie zna, a przez C jedynego wspólnego znajomego osób A i B.

Osoba C ma co najwyżej tylu znajomych co A oraz zna osobę B. Wobec tego osoba A zna co najmniej jedną osobę, której nie zna C. Oznaczmy ją przez D. Osoby tej nie zna osoba B, gdyż A i B mają dokładnie jednego wspólnego znajomego i jest nim C.

Skoro B i D się nie znają, to mają dokładnie jednego wpólnego znajomego. Nie jest nim ani A, ani C. Oznaczmy go przez E. Wspólnym znajomym osób A i B jest C, więc A nie zna E. Wspólnym znajomym osób C i D jest A skąd wynika, że C nie zna E.

Jeśli wymienionych 5 osób usiądzie przy okrągłym stole w kolejności: A, C, B, E, D, to każda osoba będzie siedziała pomiędzy swoimi znajomymi. Jeśli z kolei usiądą oni w kolejności A, B, D, C, E, to każda osoba będzie siedziała pomiędzy swoimi nieznajomymi.

---

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD > 90^\circ.$$

Okrąg opisany na trójkącie ABC przecina boki AD i CD odpowiednio w punktach K i L, różnych od wierzchołków czworokąta. Odcinki AL i CK przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że $\sphericalangle ADB = \sphericalangle PDC$.

Szkic rozwiązania

Czworokąt $ABCL$ jest wpisany w okrąg. A zatem $\sphericalangle LAB + \sphericalangle BCL = 180^\circ$ skąd wynika, że $\sphericalangle LAB + \sphericalangle ABC = 180^\circ$, czyli proste AL i BC są równoległe. Analogicznie wykazujemy, że proste AB i CK są równoległe. Wobec tego czworokąt $ABCP$ jest równoległobokiem. W szczególności $AB = AP$.

Stąd, korzystając z podobieństwa par trójkątów KPL i APC oraz DAC i DLK, otrzymujemy

$$\frac{LP}{AB} = \frac{LP}{CP} = \frac{LK}{AC} = \frac{DL}{DA}.$$

Zauważmy ponadto, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 180^\circ - ALC = \sphericalangle DLP$. A zatem trójkąty DAB i DLP są podobne, skąd wniosek, że $\sphericalangle ADB = \sphericalangle PDC$.

5. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, spełniające równość $ab+ac+bc \geqslant a+b+c$. Wykaż, że $a+b+c \geqslant 3$.

Szkic rozwiązania

Ponieważ $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geqslant 0$, więc $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Po dodaniu do obu stron tej nierówności wyrażenia $2(ab+bc+ca)$, uzyskujemy $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+ac+bc)$. Wobec tego

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{ab+ac+bc}{a+b+c} \geqslant 1\,,$$

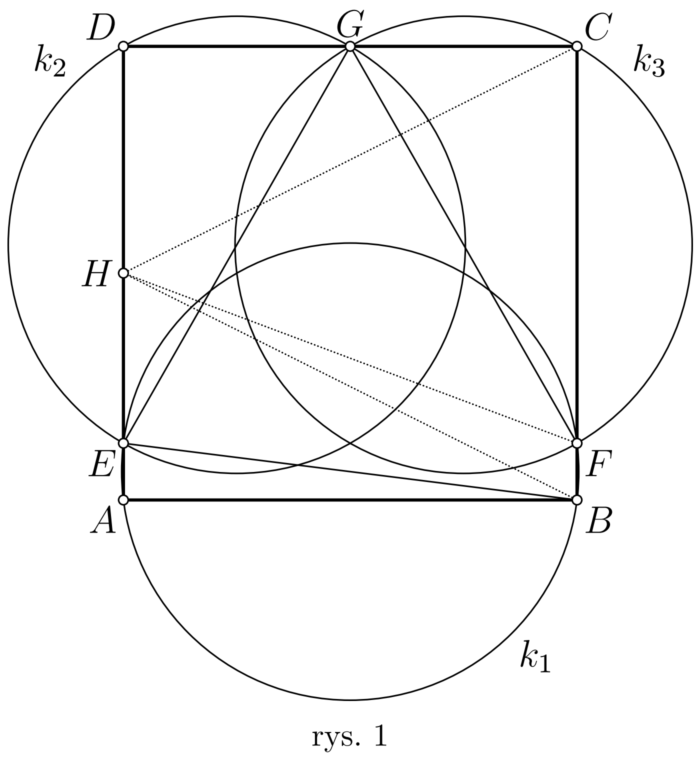
co kończy dowód.

6. Dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $|AB|=a$. Wyznacz najmniejszą możliwą długość promienia trzech przystających kół, przy pomocy których można pokryć dany kwadrat.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że najmniejsza możliwa długość promienia trzech przystających kół, przy pomocy których można pokryć dany kwadrat wynosi $a\sqrt{65}/16$.

Niech E, F będą takimi punktami odpowiednio na bokach AD, BC, że $AE=BF=\frac{1}{8}a$, a G — środkiem boku CD. Wówczas trzy przystające koła o średnicach BE, GE oraz GF długości $a\sqrt{65}/8$ pokrywają kwadrat $ABCD$ (rys. 1).



rys. 1

Przypuśćmy teraz, że istnieje pokrycie przy pomocy trzech przystających kół l_1, l_2, l_3 o mniejszej średnicy. Zauważmy, że jedno z kół musi pokryć dwa sąsiednie wierzchołki kwadratu. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że koło l_1 pokrywa wierzchołki A i B. Wobec tego koło to nie pokrywa punktu E. Załóżmy zatem, że punkt E należy do koła l_2. Stąd wynika, że punkt G nie może być pokryty przez koło l_2. Ponieważ nie należy on również do koła l_1, więc jest pokrywany przez koło l_3. Ponadto punkt C musi należeć do koła l_3. Skoro punkt A jest pokryty przez koło l_1, a punkt G — przez koło l_3, to punkt F musi należeć do koła l_2.

Oznaczmy przez H środek boku AD. Zauważmy, że nie należy on do koła l_1, gdyż koło to pokrywa punkt B. Podobnie nie należy on do koła l_2, ponieważ koło to pokrywa punkt F, ani do koła l_3, gdyż koło to pokrywa punkt C. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.