XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(28 września 2017 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. W każdym z trzech lat 2018, 2019 i 2020 pensja pana Antoniego będzie o 5% większa od jego pensji z roku poprzedniego. Wynika z tego, że pensja pana Antoniego w roku 2020 będzie większa od jego pensji z roku 2017 o

N a) dokładnie 15%;

T b) więcej niż 15%;

N c) mniej niż 15%.

Komentarz

Oznaczmy przez p_0 wysokość pensji pana Antoniego w 2017 roku. Wówczas pensja p_1 pana Antoniego w roku 2018 będzie wynosić

$$p_1 = p_0 + p_0 \cdot 5\% = p_0 + p_0 \cdot 0,05 = 1,05 \cdot p_0\,.$$

Analogicznie wyznaczamy pensje p_2 i p_3 pana Antoniego odpowiednio w latach 2019 i 2020:

$$p_2 = 1,05 \cdot p_1 = (1,05)^2 \cdot p_0\,,$$

$$p_3 = 1,05 \cdot p_2 = (1,05)^3 \cdot p_0\,.$$

Ponieważ $(1,05)^3 = 1,157625$, więc $p_3 = p_0 + p_0 \cdot 0,157625 = p_0 + p_0 \cdot 15,7625\%$. Pensja pana Antoniego w roku 2020 będzie więc większa od jego pensji w roku 2017 o $15,7625\%$.

2. Istnieje kwadrat, w którym przekątna jest dłuższa od boku o dokładnie

T a) 1;

T b) $\sqrt{2}$;

T c) $\sqrt{2}-1$.

Komentarz

W kwadracie o boku a przekątna ma długość $a\sqrt{2}$, więc różnica między długością przekątnej a długością boku jest równa $a(\sqrt{2}-1)$. Aby zbudować odpowiedni kwadrat w kolejnych podpunktach, rozwiązujemy równania

$$a(\sqrt{2}-1) = 1\,, \quad a(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}\,, \quad a(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1\,,$$

uzyskując odpowiednio $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, $a = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ oraz $a = 1$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

3. Liczby rzeczywiste x, y są różne od 0 oraz spełniają warunek $2x=3y$. Wynika z tego, że

N a) $x \leqslant y$;

N b) $x \geqslant y$;

T c) $x \neq y$.

Komentarz

a) Jeżeli $(x,y)=(3,2)$, to $2x=3y$ oraz $x>y$.

b) Jeżeli $(x,y)=(-3,-2)$, to $2x=3y$ oraz $x<y$.

c) Gdyby zachodziła równość $x=y$, to $2x=3x$. Stąd $x=0$ wbrew założeniu, że liczba x jest różna od 0.

4. Co najmniej 5 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1. Wynika z tego, że

T a) co najmniej 8 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1;

T b) co najmniej jedna ściana prostopadłościanu $\mathcal{P}$ jest kwadratem;

N c) prostopadłościan $\mathcal{P}$ jest sześcianem.

Komentarz

a), b) Prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$ ma cztery krawędzie o długości a, cztery krawędzie o długości b i cztery o długości c. Wobec tego, jeżeli co najmniej 5 krawędzi prostopadłościanu ma długość 1, to co najmniej dwie z liczb a, b, c są równe. To zaś oznacza, że pewne dwie przeciwległe ściany są kwadratami o boku długości 1.

c) Prostopadłościan o wymiarach $1 \times 1 \times 2$ spełnia warunki zadania i nie jest sześcianem.

5. Liczba dodatnich liczb nieparzystych, mniejszych od 2^{2018} jest równa

N a) 2^{1009};

T b) 2^{2017};

T c) $\left(-\sqrt{2}\right)^{4034}$.

Komentarz

a), b) Ponieważ liczba 2^{2018} jest parzysta, więc wśród liczb $1,2,3,\ldots,2^{2018}$ jest dokładnie tyle samo liczb parzystych co nieparzystych. Wobec tego dodatnich liczb nieparzystych, mniejszych od 2^{2018} jest $\frac{1}{2} \cdot 2^{2018} = 2^{2017}$.

c) Mamy $(-\sqrt{2})^{4034} = (-1)^{4034} \cdot (\sqrt{2})^{4034} = 2^{2017}$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

6. Istnieje trójkąt, w którym różnica miar pewnych dwóch kątów wewnętrznych jest równa

T a) 90°;

T b) 100°;

N c) 200°.

Komentarz

a) Trójkąt o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ ma zadaną własność, gdyż $120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

b) Trójkąt o kątach $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$ ma zadaną własność, gdyż $120^\circ - 20^\circ = 100^\circ$.

c) Gdyby istniał trójkąt o opisanej własności, to co najmniej jeden z jego kątów wewnętrznych miałby miarę większą od 200°. Nie jest to jednak możliwe, gdyż każdy kąt wewnętrzny trójkąta ma miarę mniejszą od 180°.

7. Liczba naturalna a jest dwucyfrowa, a liczba naturalna b jest trzycyfrowa. Wynika z tego, że

N a) suma $a+b$ jest liczbą trzycyfrową;

N b) iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą czterocyfrową;

N c) suma $a+b$ ma mniej cyfr niż iloczyn $a \cdot b$.

Komentarz

a), b) Jeżeli $a=20$ oraz $b=990$, to $a+b=1010$ jest liczbą czterocyfrową, a $a \cdot b = 19800$ jest liczbą pięciocyfrową.

c) Jeżeli $a=10$ oraz $b=990$, to obie liczby $a+b=1000$ oraz $a \cdot b=9900$ są czterocyfrowe.

8. Istnieje liczba pierwsza $p > 13$ o tej własności, że każda cyfra liczby p jest równa

N a) 0 lub 7;

T b) 1 lub 3;

N c) 2 lub 5.

Komentarz

a) Każda liczba naturalna, której zapis zawiera tylko cyfry 0, 7 jest podzielna przez 7. Wobec tego każda liczba o tej własności i większa od 7 jest złożona.

c) Każda liczba naturalna zakończona cyfrą 2 jest parzysta, a każda liczba zakończona cyfrą 5 jest podzielna przez 5. Wobec tego liczba p składająca się tylko z cyfr 2, 5 jest podzielna przez 2 lub przez 5. Ponieważ $p > 13$, więc liczba p jest złożona.

b) Liczba $p = 31$ jest pierwsza i większa od 13.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

9. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że istnieje trójkąt o bokach długości

T a) $a+1$, $b+1$, $c+1$;

N b) a^2, b^2, c^2;

T c) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

Komentarz

Trójkąt o bokach x, y, z istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x+y>z, \quad y+z>x, \quad z+x>y.$$

a) Skoro a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to $a+b>c$. Wobec tego

$$(a+1)+(b+1)=a+b+2>c+2>c+1.$$

W pełni analogicznie wykazujemy pozostałe dwie nierówności. Stąd wniosek, że istnieje trójkąt o bokach długości $a+1$, $b+1$, $c+1$.

c) Skoro a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to $a+b>c$. A zatem

$$a+b+2\sqrt{ab}>a+b>c, \quad \text{skąd} \quad (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c})^2.$$

Wobec tego $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$. Pozostałe dwie nierówności wykazujemy analogicznie.

b) Trójkąt o bokach 2, 2, 3 istnieje, a trójkąt o bokach 2^2, 2^2, 3^2 nie, gdyż $2^2+2^2<3^2$.

10. Każda z dwóch wysokości pewnego trójkąta ma długość większą od 1. Wynika z tego, że

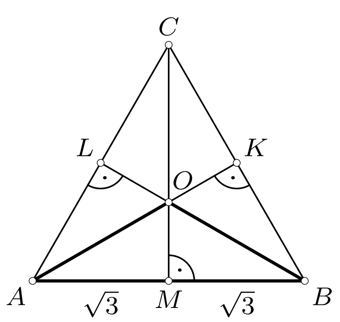
N a) trzecia wysokość tego trójkąta również ma długość większą od 1;

T b) każdy z boków tego trójkąta ma długość większą od 1;

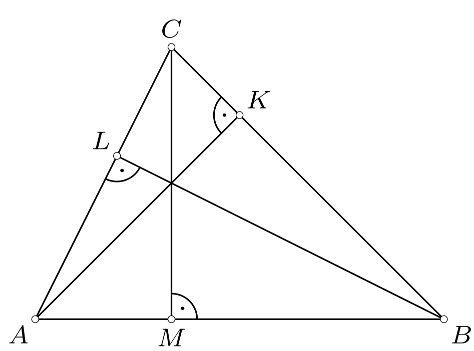
T c) pole tego trójkąta jest większe od $\frac{1}{2}$.

Komentarz

a) Rozważmy trójkąt równoboczny ABC o boku długości $2\sqrt{3}$ i oznaczmy przez O punkt przecięcia wysokości tego trójkąta, a przez K, L, M — środki odpowiednio boków BC, CA, AB (rys. 1).



rys. 1



rys. 2

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

W trójkącie ABO odcinki AL, BK, OM są wysokościami, przy czym

$$AL = BK = \sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad OM = \frac{CM}{3} = 1.$$

To oznacza, że dwie z wysokości trójkąta ABO mają długość większą od 1, a trzecia wysokość tego trójkąta ma długość równą 1 (czyli nie większą od 1).

b) Rozważmy dowolny trójkąt ABC spełniający warunki zadania i oznaczmy spodki wysokości poprowadzonych z wierzchołków A, B, C odpowiednio przez K, L, M (rys. 2). Przypuśćmy, że $BL > 1$ oraz $CM > 1$. Wówczas, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$AB^2 = AL^2 + BL^2 \geqslant BL^2, \quad \text{skąd} \quad AB \geqslant BL > 1.$$

Podobnie uzasadniamy, że

$$BC^2 = BL^2 + CL^2 \geqslant BL^2 \quad \text{oraz} \quad CA^2 = CM^2 + AM^2 \geqslant CM^2,$$

skąd $BC \geqslant BL > 1$ oraz $CA \geqslant CM > 1$. Wobec tego każdy bok trójkąta ABC ma długość większą od 1.

c) Przy oznaczeniach z rozwiązania poprzedniego podpunktu, wykorzystując nierówności $AB > 1$ oraz $CM > 1$, otrzymujemy

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM > \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

gdzie $[ABC]$ oznacza pole trójkąta ABC.

11. Liczba x jest wymierna, a liczba y jest niewymierna. Wynika z tego, że

T a) liczba $x + y$ jest niewymierna;

N b) liczba $x \cdot y$ jest niewymierna;

N c) liczba $x + y + x \cdot y$ jest niewymierna.

Komentarz

a) Gdyby liczba $x+y$ była wymierna, to również liczba $y=(x+y)-x$ byłaby wymierna, jako różnica liczb wymiernych — sprzeczność. Wobec tego liczba $x+y$ jest niewymierna.

b) Przyjmując $x = 0$ oraz $y = \sqrt{2}$, uzyskujemy $x \cdot y = 0$, co jest liczbą wymierną.

c) Przyjmując $x = -1$ oraz $y = \sqrt{2}$, uzyskujemy $x + y + x \cdot y = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = -1$, co jest liczbą wymierną.

12. Dodatnia liczba całkowita n jest podzielna przez każdą z następujących dziewięciu liczb: $1, 2, 3, \ldots, 9$. Wynika z tego, że liczba n jest

T a) podzielna przez 10;

N b) podzielna przez 27;

N c) większa lub równa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Komentarz

b), c) Zauważmy, że liczba $n=5\cdot 7\cdot 8\cdot 9$ jest podzielna przez każdą z liczb $1, 2, 3, \ldots, 9$. Jednak liczba ta nie jest podzielna przez 27, gdyż liczba $\frac{n}{27}=\frac{280}{3}$ nie jest całkowita. Liczba n jest także mniejsza od $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 9$.

a) Liczba n jest podzielna przez 2 i przez 5, więc jest także podzielna przez najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 2 i 5, czyli przez 10.

13. Sześciokąt foremny podzielono na sześć przystających wielokątów wypukłych. Wynika z tego, że każdy z tych wielokątów ma co najmniej

N a) jeden kąt wewnętrzny o mierze 60°;

N b) jeden kąt wewnętrzny o mierze 120°;

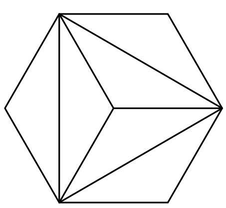
N c) dwa kąty wewnętrzne ostre.

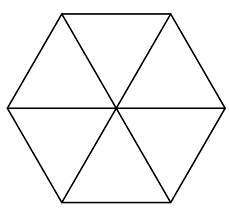
Komentarz

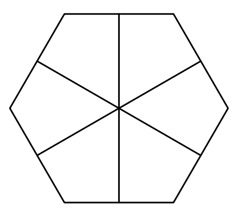
a) Sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających trójkątów o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ (rys. 3).

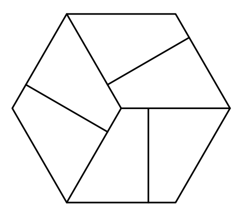
b) Sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających trójkątów równobocznych (rys. 4).

c) Sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających czworokątów o kątach $60^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ (rys. 5 lub rys. 6).


rys. 3


rys. 4


rys. 5


rys. 6

14. Każdy punkt prostej pomalowano na czerwono albo na niebiesko w taki sposób, że każdy odcinek o długości 2 zawarty w tej prostej ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że na tej prostej istnieje odcinek o końcach różnych kolorów, którego długość jest równa

N a) 4;

T b) 5;

T c) 6.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Komentarz

a) Oznaczmy przez AB dowolny odcinek długości 4 zawarty w danej prostej, a przez M środek tego odcinka. Wówczas odcinki AM oraz BM mają długość 2, więc z warunków zadania wynika, że zarówno A, jak i B są innego koloru niż M. To oznacza, że punkty A i B mają ten sam kolor. Z dowolności wyboru odcinka AB wynika, że każdy odcinek długości 4 ma końce tego samego koloru.

c) Oznaczmy przez AB dowolny odcinek długości 6 zawarty w danej prostej, a przez K i L takie punkty, że $AK = KL = LB = 2$. Wówczas punkty A oraz K są innego koloru, a punkty K i B są tego samego koloru (co wynika z rozwiązania pierwszego podpunktu). Wobec tego punkty A i B są różnych kolorów.

b) Oznaczmy przez AB dowolny odcinek długości 10 zawarty w danej prostej, przez M — środek tego odcinka, a przez N — taki punkt, że $AN = 4$ oraz $NB = 6$. Z rozwiązania podpunktu a) wnioskujemy, że A i N mają ten sam kolor, a z rozwiązania podpunktu c) otrzymujemy, że N i B są różnych kolorów. To oznacza, że punkty A i B są różnych kolorów. W takim razie jeden z odcinków AM, BM długości 5 ma końce różnych kolorów.

Uwaga

Zauważmy, że w podpunkcie c) wykazaliśmy własność znacznie ogólniejszą niż sformułowaną w treści zadania, mianowicie *każdy* odcinek długości 6 ma końce różnego koloru.

15. Sześcian o krawędzi 1 można tak przeciąć płaszczyzną, aby uzyskać w przekroju prostokąt, którego pole jest

T a) większe od 1;

T b) równe 1;

T c) mniejsze od 1.

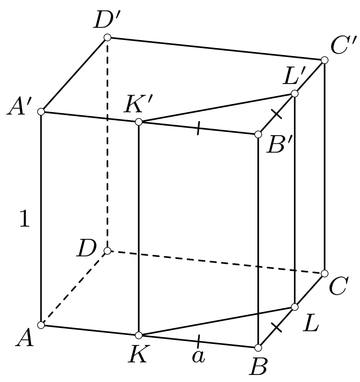
Komentarz

Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie sześcianem o krawędzi 1, którego wierzchołki są tak oznaczone, że kwadraty $ABCD$, $ABB'A'$ oraz $A'B'C'D'$ są jego ścianami. Oznaczmy przez K, L, K', L' takie punkty leżące odpowiednio na krawędziach AB, BC, $A'B'$, $B'C'$, że

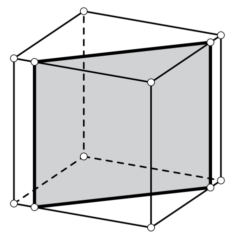
$$BK = BL = B'K' = B'L' = a,$$

przy czym $0 < a < 1$ (rys. 7). Wówczas czworokąty $BKK'B'$ oraz $BLL'B'$ są prostokątami, więc wielościan $BKLB'K'L'$ jest graniastosłupem prostym. Zatem czworokąt $KLL'K'$ jest prostokątem, którego pole jest równe $KL \cdot KK' = a\sqrt{2}$.

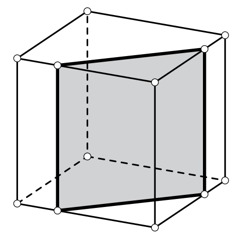
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku



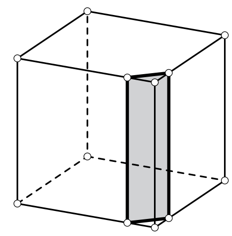
rys. 7



rys. 8



rys. 9



rys. 10

a) Jeżeli $a > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 8), to $KLL'K'$ jest prostokątem o polu większym od 1.

b) Jeżeli $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 9), to $KLL'K'$ jest prostokątem o polu równym 1.

c) Jeżeli $a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 10), to $KLL'K'$ jest prostokątem o polu mniejszym od 1.

Uwaga

W podpunkcie b) odpowiednie cięcie można zrealizować również płaszczyzną równoległą do pewnej pary przeciwległych ścian sześcianu. Z kolei w podpunkcie a) można także na przykład rozważyć cięcie przez parę przeciwległych krawędzi sześcianu (np. płaszczyzną $ACC'A'$, co odpowiada $a = 1$ w przedstawionej w rozwiązaniu konstrukcji).

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku