

Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej
Juniorów — poziom OMJ



7–13 czerwca 2026 r.

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

| | 6 p. | 5 p. | 2 p. | 0 p. |
|-----|------|------|------|------|
| 1. | 18 | 1 | 0 | 3 |
| 2. | 16 | 1 | 0 | 5 |
| 3. | 16 | 1 | 2 | 3 |
| 4. | 17 | 3 | 1 | 1 |
| 5. | 4 | 5 | 2 | 11 |
| 6. | 2 | 1 | 0 | 19 |
| 7. | 18 | 1 | 2 | 1 |
| 8. | 7 | 3 | 4 | 8 |
| 9. | 4 | 1 | 1 | 16 |
| 10. | 2 | 0 | 2 | 18 |
| 11. | 0 | 2 | 3 | 17 |
| 12. | 17 | 5 | 0 | 0 |
| 13. | 19 | 1 | 0 | 2 |
| 14. | 6 | 1 | 2 | 13 |
| 15. | 2 | 4 | 0 | 16 |
| 16. | 4 | 0 | 0 | 18 |
| 17. | 11 | 3 | 2 | 6 |
| 18. | 5 | 0 | 1 | 16 |
| 19. | 4 | 0 | 1 | 17 |
| 20. | 4 | 0 | 0 | 18 |
| 21. | 0 | 1 | 1 | 20 |

Treści zadań

Zadanie 1.

Dodając do siebie czterocyfrowe liczby naturalne m oraz n , zamiast liczby m użyto liczby otrzymanej z m przez zamianę jednej cyfry na inną. W ten sposób otrzymano wynik równy $4(m + n)$. Znajdź wszystkie możliwe pary liczb (m, n) .

Zadanie 2.

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkty D i E leżą na boku AB w taki sposób, że

$$DI \parallel AC \quad \text{oraz} \quad EI \parallel BC.$$

Udowodnij, że obwód trójkąta DEI jest równy długości boku AB .

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{3(a + b + c)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Zadanie 4.

W turnieju szachowym rozegranym systemem „każdy z każdym” uczestniczyło 9 chłopców i 9 dziewcząt. Każda para uczestników rozegrała dokładnie jedną partię. Za wygraną przyznawano 1 punkt, za remis $\frac{1}{2}$ punktu, a za przegraną 0 punktów. Po zakończeniu turnieju okazało się, że wszyscy uczestnicy uzyskali tę samą liczbę punktów. Udowodnij, że co najmniej jedna partia między chłopcem, a dziewczyną zakończyła się remisem.

Zadanie 5.

Na tablicy wypisano liczby naturalne od 1 do n , tworząc liczbę:

$$123456789101112131415\dots$$

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą $n \geq 1$, dla której łączna liczba napisanych cyfr jest podzielna przez 1000.

Zadanie 6.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD = 80^\circ = \sphericalangle ABC$ oraz $BA = AD = DC$. Oblicz miarę kąta ADC , jeśli wiadomo, że jest on ostry.

Zadanie 7.

Liczbę naturalną nazwiemy *niedojrzałą*, jeśli suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 17. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n , dla której liczby n i $n + 1$ są *niedojrzałe*.

Zadanie 8.

Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x_1^{2026} + x_2^{2026} + \dots + x_{67}^{2026} = 1 \\ x_1^{2027} + x_2^{2027} + \dots + x_{67}^{2027} = -1. \end{cases}$$

Zadanie 9.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC . Wysokości BE i CF przecinają się w punkcie H . Znajdź miarę kąta BAC , jeśli wiadomo, że czworokąt $OEHF$ jest równoległobokiem.

Zadanie 10.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) spełniające równanie

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

Zadanie 11.

Makka Pakka kolekcjonuje kolorowe kamienie, ale jedynie te o dodatniej wadze wyrażonej całkowitą liczbą kilogramów. Wie, że ich łączna waga wynosi 2026 kg, jednak nie jest w stanie rozdzielić wszystkich kamieni do dwóch worków w taki sposób, aby w obu workach łączna waga kamieni była taka sama. Ile maksymalnie kamieni może liczyć kolekcja Makki Pakki? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12.

Niezerowe liczby rzeczywiste a, b spełniają równość

$$a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}.$$

Udowodnij, że $a = b$ lub $a = -b$.

Zadanie 13.

Gargamel przeprowadził na złapanych Smerfach pewien eksperyment. Ustawił on 7 Smerfów jeden za drugim w następujący sposób:

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_5 \rightarrow S_6 \rightarrow S_7,$$

przy czym każdy z nich widzi wszystkie Smerfy o numerach większych od swojego, ale żadnego Smerfa o numerze mniejszym. Następnie na głowę każdego z nich nałożył czerwoną albo niebieską czapkę oraz poinformował ich, że miał do dyspozycji łącznie 6 czerwonych i 7 niebieskich czapek.

Na koniec, zaczynając od S_1 , zadał każdemu z nich kolejno pytanie: „Jaką masz czapkę?”. Każdy Smerf słyszał odpowiedzi udzielone przez poprzedników. Odpowiedzi Smerfów były następujące:

$$\begin{aligned} S_1 &: \text{ „Nie wiem”}, \\ S_2 &: \text{ „Nie wiem”}, \\ &: \\ S_6 &: \text{ „Nie wiem”}, \\ S_7 &: \text{ „Wiem, mam czapkę w kolorze ...”}. \end{aligned}$$

Wyjaśnij, dlaczego ostatni Smerf miał pewność, jaki kolor czapki ma na głowie, mimo że znał jedynie odpowiedzi swoich poprzedników.

Uwaga: Smerfy są nieskończenie mądre i znają zasady eksperymentu, ale zaskoczone przez Gargamela nie mogły wcześniej ustalić wspólnej strategii.

Zadanie 14.

Niech M będzie środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC . Punkty D i E są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B . Udowodnij, że proste MD i ME są styczne do okręgu opisanego na trójkącie CDE .

Zadanie 15.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (k, l) spełniające równanie

$$k^5 - l^5 = 16kl.$$

Zadanie 16.

Pan Ambroży Kleks zadał Adasiowi następującą zagadkę. Narysował na aksamitnej kartce prostokątną tablicę o dodatniej liczbie wierszy i kolumn, a następnie w każde jej pole wpisał, niekoniecznie różne, liczby całkowite. W jednym ruchu Adaś wybiera wiersz lub kolumnę i zmienia znak każdej liczby w wybranym wierszu lub kolumnie. Czy niezależnie od liczb wpisanych przez Ambrożego może wykonać ruchy w taki sposób, aby na koniec suma liczb w każdej kolumnie oraz suma liczb w każdym wierszu była nieujemna? Odpowiedź uzasadnij.

Bonus: Adaś, po rozwiązaniu zagadki, zrewanżował się profesorowi, zadając mu tę samą zagadkę, lecz dla liczb rzeczywistych. Jaka jest odpowiedź na pytanie Adasia?

Zadanie 17.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) takie, że $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą, a $2ab$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 18.

Udowodnij, że w trójkącie ostrokątnym o bokach długości a, b, c oraz wysokościach długości h_a, h_b, h_c można podzielić te sześć odcinków na dwie grupy po trzy odcinki tak, aby z odcinków każdej grupy dało się zbudować trójkąt.

Zadanie 19.

Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{2026\sqrt{2025} + 2025\sqrt{2026}} < 1.$$

Zadanie 20.

Pancernik Paweł planuje podróż po Parabolistanie. Przebywa w Pochodniowie, stolicy tego państwa. Między każdymi dwoma różnymi miejscami spośród stolicy i punktów turystycznych istnieje dokładnie jedno bezpośrednie połączenie, przy czym wszystkie połączenia są jednokierunkowe. Paweł zauważył, że startując z Pochodniowa, może dostać się do każdego punktu turystycznego.

Udowodnij, że istnieje taka podróż rozpoczynająca się w Pochodniowie, podczas której Paweł odwiedzi każdy punkt turystyczny dokładnie raz i nie odwiedzi ponownie Pochodniowa.

Zadanie 21.

Niech $ABCD A' B' C' D'$ będzie sześcianem. Punkty M i N leżą odpowiednio na krawędziach BC i DD' w taki sposób, że $BM = DN$. Wykaż, że prosta $A'M$ jest prostopadła do płaszczyzny trójkąta $AB'N$.