

Znajomości

Konrad Majewski

Uwaga. Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A (podobnie z przyjaźnieniem się).

1. Wykaż, że w dowolnej grupie $n \geq 2$ osób istnieją dwie osoby mające taką samą liczbę znajomych w tej grupie.
2. W klasie każda osoba przyjaźni się z dokładnie 5 innymi osobami. Udowodnij, że liczba osób w tej klasie jest parzysta.
3. (V OMG/2) Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.
4. Na weselu każda osoba ma wśród pozostałych dokładnie 50 znajomych. Wykaż, że istnieje grupa złożona z co najmniej 51 z tych osób, które mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda osoba siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.
5. (VIII OMG/3) Na przyjęciu spotkało się 99 osób. Wiadomo, że wśród każdych trzech osób można wskazać taką, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Wykaż, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.
6. (XVI OMJ/2) Tomek zaprosił na zdalne przyjęcie urodzinowe 11 swoich znajomych, którzy kolejno będą dołączać do spotkania. Tomek dobrał gości w taki sposób, aby niezależnie od kolejności w jakiej będą dołączać, zawsze nowo przybyła osoba znała co najmniej połowę już obecnych osób, wliczając Tomka. Wykaż, że wśród zaproszonych gości istnieje taki, który zna wszystkich pozostałych 10 znajomych Tomka.
7. Udowodnij, że w gronie dowolnych 6 osób istnieją trzy, które znają się nawzajem, lub istnieją trzy, które nie znają się nawzajem.
8. Udowodnij, że w gronie dowolnych 9 osób istnieją trzy, które znają się nawzajem, lub istnieją cztery, które nie znają się nawzajem.
9. (XVII OMJ/T) W gronie sześciu osób każda zna dokładnie trzy spośród pozostałych pięciu osób. Czy wynika z tego, że:
 - (a) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się znają?
 - (b) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się nie znają?
 - (c) można te sześć osób podzielić na trzy pary znających się osób?
10. W klasie każdy uczeń nie przyjaźni się z co najwyżej trzema innymi osobami z klasy. Wykaż, że klasę można podzielić na dwie drużyny w taki sposób, aby każdy uczeń nie przyjaźnił się z co najwyżej jedną osobą w swojej drużynie.
11. Na obrady ONZ przybyło 100 prezydentów, z których każdy zna co najmniej 50 z pozostałych. Udowodnij, że można tak usadzić wszystkich prezydentów wokół okrągłego stołu, aby każdy siedział obok dwóch swoich znajomych.
12. Na wesele przyszło 101 osób. Okazało się, że dla dowolnej grupy 50 osób istnieje osoba na weselu spoza grupy, która zna wszystkie osoby z tej grupy. Wykaż, że istnieje osoba, która zna wszystkie osoby na weselu.